

**УДК 681.2:621.3.082.1**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИННОГО РЕЗОНАТОРА  
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЯЗКОСТИ И ПЛОТНОСТИ  
СКВАЖИННОГО ФЛЮИДА**

**MODELING OF PLATE VIBRATIONS FOR VISCOSITY  
AND DENSITY OF WELL FLUIDS ESTIMATION**

**Котов В. В., Ишинбаев Н. А., Краснов А. Н., Ситников А. В.**

**Уфимский государственный нефтяной технический университет  
г. Уфа, Российская Федерация**

**V. V. Kotov, N. A. Ishinbaev, A. N. Krasnov, A. V. Sitnikov**

**Ufa State Petroleum Technological University,  
Ufa, Russian Federation**

**e-mail: [ufa-znanie@mail.ru](mailto:ufa-znanie@mail.ru)**

**Аннотация.** Измерение плотности и вязкости широко применяется в процессе бурения, добычи, переработки нефти и реализации нефтепродуктов. В статье приводится математическое моделирование свободных затухающих колебаний пластинного резонатора в различных средах и экспериментальная проверка с целью подтверждения адекватности модели. В результате исследования была получена математическая зависимость, связывающая между собой параметры свободных затухающих колебаний (частота, затухание) и параметры исследуемой жидкости (плотность, вязкость), проведены экспериментальные исследования. В результате экспериментов получены осциллограммы свободных колебаний пластины вискозиметра в жидкостях с разной плотностью и вязкостью, рассчитаны постоянные коэффициенты

резонатора, «присоединенная» масса и толщина слоя «присоединенной» жидкости. Используя вычисленные коэффициенты, определены плотность и вязкость керосина и ацетона. Полученная модель позволила выявить закономерности изменения частоты свободных колебаний в жидкости от плотности, а также определить параметры затухающих колебаний пластинного резонатора в вязкой среде; на основе экспериментальных данных рассчитать необходимые коэффициенты для данного резонатора и в последующем использовать их для вычисления плотности и вязкости жидкостей по осциллограмме колебаний.

**Abstract.** Density and viscosity measurement is widely used in the drilling, production, processing of oil and sales of petroleum products. The article presents mathematical modeling of free damping oscillations plate in various fluids and experimental verification to confirm the adequacy of the model. As a result of the research, a mathematical relation linking free damped oscillations parameters (frequency, damping) and liquid parameters (density, viscosity) was obtained, and experimental research were performed. As a result of the experiments oscillograms of free oscillations of plate vibration in liquids with different density and viscosity were obtained, the resonator's constants, the «attached» mass and the thickness of the layer of the «attached» liquid were calculated. Using the calculated coefficients, the density and viscosity of kerosene and acetone are determined. The achieved model allows to determine the regularities of the change of free oscillations frequency in a liquid, depending on the density, and also define the parameters of the damping plate vibrations in a viscous liquid; on the basis of experimental data, to calculate the necessary coefficients for a given resonator and subsequently use them to estimate fluids density and viscosity using oscillogram of damping oscillations.

**Ключевые слова:** затухающие колебания, вынужденные колебания, вибрационный плотномер, вязкость, плотность, вибрационный вискозиметр, пластинный резонатор, колебания пластины, автоколебания.

**Key words:** damped oscillations, forced oscillations, vibrational densitometer, viscosity, density, vibrational viscometer, plate resonator, plate vibrations, self-oscillation.

Измерение плотности и вязкости нефти и нефтепродуктов необходимо для учета и определения параметров качества. Эти измерения производятся в процессах добычи, подготовки, транспортировки, переработки нефти и реализации готовой продукции потребителю, т.е. на всех этапах жизненного цикла. Требования, предъявляемые к средствам измерения плотности и вязкости, определены государственным стандартом ГОСТ 8.615-2005, который ограничивает предельно допускаемую максимальную погрешность измерения. Измерения плотности и вязкости, удовлетворяющие предъявляемым к ним требованиям, производится двумя приборами. Создание мультисенсорной системы, т. е. одного прибора для измерения плотности и вязкости, является актуальной как с технической, так и экономической точки зрения.

*Целью данной статьи является моделирование и экспериментальное исследование колебаний пластинного резонатора для создания мультисенсорной системы плотномера-вискозиметра. Для достижения цели решаются следующие задачи:*

- составление уравнения динамики затухающих колебаний пластинного резонатора;
- на основе решения этого уравнения определение зависимости параметров колебаний от плотности и вязкости окружающей среды;
- экспериментальные исследования для определения индивидуальных параметров резонатора и проверки адекватности полученных соотношений.

*Пластинный резонатор* представляет собой систему с распределенными параметрами [1]. Колебания в этой системе

описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка. Решение этого уравнения при наличии трения является очень громоздким и сложным для анализа. В связи с этим было принято решение описывать колебания пластины как системы с эквивалентными сосредоточенными параметрами. Правомерность этой замены подтверждается методом Релея-Ритца и экспериментами, которые показывают, что колебания пластинного резонатора являются гармоническими (полигармоническими).

Уравнение динамики колебаний системы с вязким трением запишется в виде [2, 3]:

$$F_{ин} + F_{упр} + R = 0, \quad (1)$$

где  $F_{ин}$  – сила инерции;

$F_{упр}$  – сила упругости;

$R$  – сила вязкого трения.

Силы, входящие в уравнение (1), были определены следующим образом:

$$F_{ин} = (M + m)\ddot{x}, \quad (2)$$

где  $M$  – масса пластины;

$m$  – «присоединенная» масса жидкости.

$$F_{упр} = kx, \quad (3)$$

где  $k$  – коэффициент (модуль) упругости пластины.

$$R = (k_1 + k_2\eta)\dot{x}, \quad (4)$$

где  $k_1$  – коэффициент, определяющий собственное трение системы;

$k_2\eta$  – коэффициент, определяющий вязкое трение, обусловленное окружающей средой.

«Присоединенная» масса жидкости может быть определена по формуле [4, 5]:

$$m = \rho Sd, \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;

$S$  – «колеблющаяся» площадь пластины;

$d$  – толщина слоя «присоединённой» жидкости.

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  являются индивидуальными для каждого пластинного резонатора и могут быть определены на основе эксперимента.

Подставляя (2), (3), (4) в (1), после преобразований получаем дифференциальное уравнение затухающих колебаний пластины

$$\ddot{x} + \frac{k_1+k_2\eta}{M+m} \dot{x} + \frac{k}{M+m} x = 0. \quad (6)$$

Сравнивая (6) со стандартным уравнением для колебаний системы с вязким трением в режиме свободных затухающих колебаний [2]:

$$\ddot{x} + 2\vartheta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (7)$$

получаем параметры затухающих колебаний, описываемых уравнением (6):

$$\vartheta = \frac{k_1+k_2\eta}{2(M+\rho Sd)}; \quad (8)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M+\rho Sd}; \quad (9)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \vartheta^2} = \sqrt{\frac{k}{M+\rho Sd} - \left(\frac{k_1+k_2\eta}{2(M+\rho Sd)}\right)^2}, \quad (10)$$

где  $\vartheta$  – коэффициент затухания;

$\omega_0$  – собственная циклическая частота колебаний пластины при отсутствии трения;

$\omega$  – собственная циклическая частота колебаний пластины с учетом трения.

Зависимости (8) и (10) определяют зависимость параметров (затухания и частоты) затухающих колебаний пластины от плотности и вязкости окружающей среды. Таким образом, оба параметра затухающих колебаний

пластины зависят от плотности и вязкости среды. Следовательно, при создании мультисенсорной системы, необходимо ввести коррекцию на результаты измерения плотности по вязкости, и коррекцию на результаты измерения вязкости по плотности.

Для определения индивидуальных параметров пластинного резонатора и проверки адекватности зависимостей (8) и (10) были проведены экспериментальные исследования. В качестве резонатора использовалась пластина с параметрами, приведенными в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные пластины

№	Параметр	Обозначение	Значение
1	Длина пластины, м	$l$	0,077
2	Ширина пластины, м	$b$	0,0195
3	Толщина пластины, м	$a$	0,0004
4	Плотность материала пластины кг/м <sup>3</sup>	$\rho_m$	7850
5	Масса пластины, кг	$M$	0,0048

Для регистрации затухающих колебаний на пластину были наклеены с двух сторон миниатюрные тензорезисторы, которые были включены в смежные плечи мостовой схемы, питаемой от источника постоянного тока. Напряжение, пропорциональное амплитуде колебаний, на измерительной диагонали мостовой схемы, после усиления инструментальным усилителем, регистрировалось цифровым осциллографом.

Исследования затухающих колебаний проводились в четырех средах: в воздухе, воде, керосине и ацетоне. По осциллограммам колебаний были определены коэффициенты затухания и собственные частоты колебаний всех сред.

Коэффициент  $k_1$  определяется по затуханию колебаний в воздухе, в соответствии с (8) при  $k_2 = 0$ , составил  $k_1 = 0,0159$  кг/с.

Коэффициент  $k_2$  по затуханию в воде с известной плотностью и вязкостью составил  $k_2 = 1718,53$  м.

Вычисления плотности и вязкости керосина и ацетона производились путем решения системы уравнений (8) и (10) с использованием данных, полученных в результате эксперимента – коэффициентов затухания и собственных частот этих сред. Результаты экспериментальных данных и вычислений приведены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты измерений и вычислений для различных сред

Среда	Частота, Гц	Плотность среды $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Коэффициент затухания $\rho$	Динамическая вязкость $\eta$ , Па*с
Воздух	54,27	-	1,653	-
Вода	18,32	1000	20,629	0,001002
Керосин	20,68	760	27,707	0,001057
Ацетон	20,23	800	7,760	0,000303

## Вывод

Полученные значения согласуются с табличными данными, что подтверждает адекватность модели.

## Список используемых источников

- 1 Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 915 с.
- 2 Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 344 с.
- 3 Leissa A.W. Vibrations of Plates. Washington: National Aeronautics and Space Administration. 1969. 353 p.
- 4 Иориш Ю.И. Виброметрия. Измерение вибрации и ударов. Общая теория, методы и приборы. М.: Машгиз, 1963. 772 с.
- 5 Жуков Ю.П. Вибрационные плотномеры. М.: Энергоатомиздат, 1991. 144 с.

## References

- 1 Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S. E. Teoriya kolebanii [Theory of oscillations]. Moscow, Gos.fizmatlit. Publ, 1959. 915 p. [in Russian].
- 2 Timoshenko S.P. Kolebaniya v inzhenernom dele [Oscillations in Engineering]. Moscow, Fizmatgis Publ., 1959. 344 p. [in Russian].
- 3 Leissa A.W. Vibrations of Plates. Washington, National Aeronautics and Space Administration, 1969. 353 p.
- 4 Iorish, Yu. I. Vibrometriya. Izmerenievibratsiiydarov.Obshayateoriya, metodi I pribori [Vibrometry. Measurement of Vibration and Shock. General Theory, Methods and Devices]. Moscow, Mashgiz, Publ, 1963. 722 p. [in Russian].
- 5 Zhukov Yu.P. Vibratsionnie plotnomery [Vibration Densitometers] Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991. 144 p. [in Russian].

## Сведения об авторах

### About the authors

Котов В. В., аспирант кафедры «Автоматизация технологических процессов и производств», ФГБОУ ВО «УГНТУ», г. Уфа, Российская Федерация

V. V. Kotov, Post-graduate of Automation of Technological Processes and Production Department, FSBEI HE «USPTU», Ufa, Russian Federation

Ишинбаев Н. А., канд. техн. наук, доцент кафедры «Автоматизация технологических процессов и производств», ФГБОУ ВО «УГНТУ», г. Уфа, Российская Федерация

N. A. Ishinbaev, Candidate of Engineering Sciences, Assistant Professor of Automation of Technological Processes and Production Department, FSBEI HE «USPTU», Ufa, Russian Federation



Краснов А. Н., канд. техн. наук, доцент кафедры «Автоматизация технологических процессов и производств», ФГБОУ ВО «УГНТУ», г. Уфа, Российская Федерация

A. N. Krasnov, Candidate of Engineering Sciences, Assistant Professor of of Automation of Technological Processes and Production Department, FSBEI HE «USPTU», Ufa, Russian Federation

e-mail: ufa-znanie@mail.ru

Ситников А. В., магистрант кафедры «Автоматизация технологических процессов и производств», ФГБОУ ВО «УГНТУ», г. Уфа, Российская Федерация

A. V. Sitnikov, Undergraduate Student of Automation of Technological Processes and Production Department, FSBEI HE «USPTU», Ufa, Russian Federation