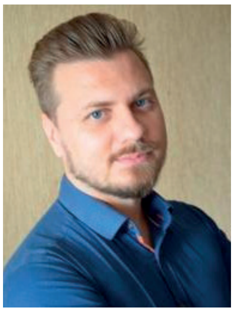
Моисеев И. С.
Moiseev I. S.
бакалавр кафедры систем автоматического управления и бортовой вычислительной техники,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»,
г. Санкт-Петербург,
Российская Федерация



Жиленков А. А.
Zhilenkov A. A.
кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой киберфизических систем,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»,
г. Санкт-Петербург,
Российская Федерация

Ениватов В. В.
Enivatov V. V.
кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой судовых энергетических установок,
ФГБОУ ВО «Керченский государственный морской технологический университет»,
г. Керчь, Российская Федерация

Зинченко А. А.
Zinchenko A. A.
аспирант кафедры электрооборудования судов и автоматизации производства,
ФГБОУ ВО «Керченский государственный морской технологический университет»,
г. Керчь, Российская Федерация

УДК 519.876.5

DOI: 10.17122/1999-5458-2021-17-1-81-89

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ РЕШЕНИЕ МЕТОДАМИ ВАРИАЦИОННЫХ ИНТЕГРАТОРОВ ГРУППЫ ЛИ

Актуальность

Сегодня моделирование является наиболее эффективным и низкозатратным способом изучения динамики механических систем. В статье рассматриваются особенности моделирования двух видов механических систем — голономных и неголономных систем. В связи с тем, что кинетические связи в неголономных системах приводят к их некоторым особенностям, которые отличают их от голономных систем, появляется необходимость поиска иных методов моделирования динамики неголономных систем. В статье рассматриваются два таких метода, а именно метод вариационного интегрирования и метод интеграторов группы Ли. Анализируются подходы к их синтезу и преимущества перед иными методами.

Методы исследования

Вариационные интеграторы — класс дискретизации механических систем, которые получены путем дискретизации принципа стационарного действия Гамильтона. Они применимы в статье как к обыкновенным дифференциальным уравнениям, так и к уравнениям в частных производных, а также к консервативным и вынужденным задачам. В отсутствие принуждения они сохраняют (мульти) симплектические структуры, импульсы, возникающие из симметрий, и энергию с точностью до ограниченной погрешности.

В статье авторы применили фундаментальную теорию дискретной вариационной механики для обыкновенных дифференциальных уравнений подобного рода и применили теорию, которая используется в качестве основы для построения вариационных интеграторов и анализа. Структура исследования используется в качестве отправной точки для разработки нового класса методов асинхронного шага по времени для механики твердого тела, известного как асинхронно-вариационный метод. AVI методы изменяют временные интервалы между различными элементами в сетке конечных элементов с полностью независимыми и независимыми временными шагами, что позволяет моделировать локально с максимальной скоростью, допускаемой ограничениями локальной устойчивости. Приведены численные примеры AVI, демонстрирующие превосходные свойства, которыми они обладают благодаря их вариационному происхождению.

Результаты

Особое внимание уделяется построению функции Лагранжа и роли вариационного принципа Гамильтона при выводе уравнений структуры баланса. Представлена связь между симметриями функции Лагранжа и существованием инвариантов динамики наряду. Освещен проблемный аспект моделирования — дискретный аналог вариационного принципа Гамильтона, который обеспечивает систематическую процедуру построения дискретных приближений к точной траектории механической системы как в конфигурационном, так и в фазовом пространствах. Объясняются аппроксимационные свойства и геометрические характеристики полученных дискретных траекторий.

Ключевые слова: моделирование динамики механических систем, голономные системы, неголономные системы, вариационные интеграторы, интегратор групп Ли, моделирование.

SELECTED PROBLEMS OF MODELING THE DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS AND THEIR SOLUTION BY THE METHODS OF THE LIE GROUP VARIATIONAL INTEGRATORS

Relevance

Modeling is currently the most effective and low-cost way to study the dynamics of mechanical systems. This article discusses the features of modeling two types of mechanical systems, namely holonomic and nonholonomic systems. Examples of relationships in these systems are also considered. Due to the fact that kinetic connections in non-holonomic systems lead to certain features that distinguish them from holonomic systems, it becomes necessary to search for other methods for modeling the dynamics of non-holonomic systems.

Research methods

This article discusses two such methods, namely the method of variational integration and the method of Lie group integrators, describes the principles of their work and their advantages over other methods. Variational integrators are a class of discretizations for mechanical systems which are derived by discretizing Hamilton’s principle of stationary action. They are applicable to both ordinary and partial differential equations, and to both conservative and forced problems. In the absence of forcing they conserve (multi-) symplectic structures, momenta arising from symmetries, and energy up to a bounded error. In the article, the authors applied the fundamental theory of discrete variational mechanics to ordinary differential equations in detail of the genus and applied the theory that is used as a basis for constructing variational integrators and analysis. The research framework is used as a starting point for the development of a new class of asynchronous time step methods for rigid body mechanics, known as the asynchronous variational method. AVI

methods alter the time intervals between different elements in a finite element mesh with fully independent and independent time steps, which allows simulations locally at the fastest speed allowed by local stability constraints. Numerical examples of AVIs are provided, demonstrating the superior properties they possess due to their variational origin.

Results

Particular attention is paid to the construction of the Lagrange function and the role of Hamilton's variational principle in deriving the equations of the balance structure. The connection between the symmetries of the Lagrange function and the existence of dynamic invariants alongside is presented. The problematic aspect of modeling is highlighted — a discrete analogue of Hamilton's variational principle, which provides a systematic procedure for constructing discrete approximations to the exact trajectory of a mechanical system in both configuration and phase spaces. The approximation properties and geometric characteristics of the obtained discrete trajectories are explained.

Keywords: modeling the dynamics of mechanical systems, holonomic systems, nonholonomic systems, variational integrators, Lie group integrator.

Введение

В настоящий момент мы имеем два основных способа исследования динамики механической системы: моделирование и физический эксперимент.

Если имеется опытная модель механической системы, то на ней можно поставить ряд испытаний с целью определения её характеристик, однако для определения различных показателей системы при разных режимах работы может понадобиться большое количество экспериментов и большие затраты времени и средств, к примеру на оснастку площадок для экспериментов, регулировку измерительных приборов, исследование и обработку полученных решений и т.д. Также возникает проблема того, что при физических экспериментах невозможно исследование всех необходимых динамических показателей, либо эксперимент может быть опасен сам по себе (рисунок 1).

Моделирование — это эффективный инструмент, позволяющий проводить любое количество экспериментов и получать любые необходимые показатели динамической системы [1–3]. Он даёт точный анализ систем, при этом требуя минимальные затраты. Разберём особенности моделирования двух видов механических систем.

Рассмотрим механическую систему. Конфигурацию нашей механической системы опишем вектором координат $q \in Q$. Пространство конфигураций Q — это n-мерное гладкое многообразие. Для $q(t) \in Q$ обобщённая скорость — это вектор $\dot{q}$. Механическая система может быть ограничена во многих случаях, например из-за своей конструкции или из-за того, как она движется и управляется. Ограничения могут быть двухсторонними и односторонними, зависеть от времени или нет. Мы же рассмотрим ограничения голономные и неголономные.

Голономные системы

Ограничения, которые могут быть заданы в виде

$$f_i(q) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k < n), \tag{1}$$

являются голономными связями.

Система же, которая имеет только голономные ограничения, имеет название голономной системы [3–5]. Смысл ограничений, описанных в (1), заключается в том, чтобы лимитировать конфигурации системы *(n–k)*-мерным гладким многообразием *Q*.

Для моделирования таких систем используется подход, при котором сохраняются уравнения связи как таковые, и решается система дифференциальных-алгебраических уравнений.

Голономные ограничения зачастую вводятся механическим связями между различными телами системы.

Примером такой системы может являться математический маятник (рисунок 2).

В данном случае голономной связью является нить, длина которой изменяется по некоторому закону.

Задача исследования динамики голономной системы является более простой, чем неголономной, по причине того, что для её решения имеется возможность пользоваться множество методов и теорем, а именно уравнение Лагранжа, уравнение Гамильтона и т.д.

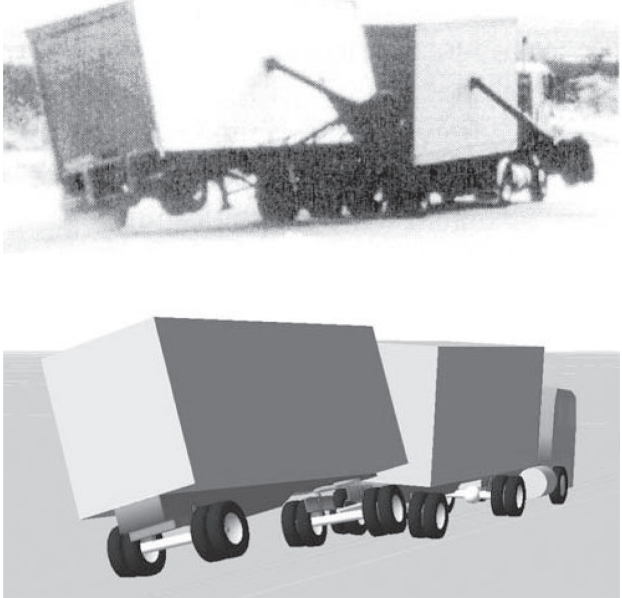


Рисунок 1. Проведение физических экспериментов (сверху), связанных с опасностью и требующих дополнительного оборудования в виде аутригера, и компьютерное моделирование (снизу)

Figure 1. Conducting physical experiments (top) associated with danger and requiring additional equipment in the form of an outrigger and computer simulation (bottom)

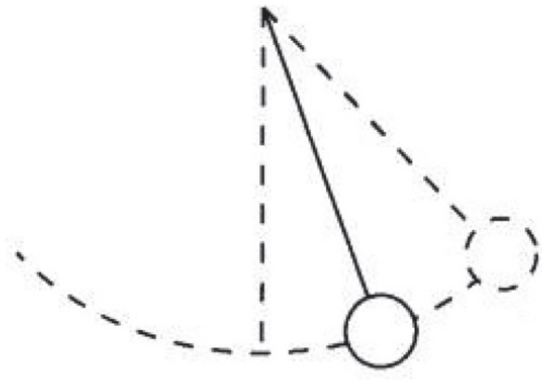


Рисунок 2. Математический маятник

Figure 2. Mathematical pendulum

Проблемы моделирования динамики неголономных систем

Ограничения, выражения которых включают обобщённые координаты и скорости в виде

$$p_i(q)\dot{q} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k < n), \qquad (2)$$

называются кинематическими связями. Они ограничивают обобщённые скорости, которые могут быть достигнуты при выбранных конфигурациях.

Естественно, что голономные связи также учитывают наличие кинематических связей в виде

$$\frac{\partial f_i}{\partial q}\dot{q} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \cdot \qquad (3)$$

Но не всегда верно обратное, так как может получиться, что кинематические связи невозможно проинтегрировать, то есть невозможно представить в форме (1). Тогда данные связи именуются неголономными. Наличие этих связей приводит к тому, что происходит ограничение подвижности совершенно иначе, чем в случае с голономными связями. Также заметим, что при наличии неголономных связей k в механической системе с n обобщёнными координатами, хотя обобщённые скорости ограничены в каждой точке $(n–k)$-мерным подпространством, доступность всего пространства конфигураций остаётся неизменной [5, 6].

Неголономные ограничения возникают при моделировании во многих областях, например в робототехнике (мобильные роботы, космические роботы-манипуляторы и т.д.) или, например, при создании модели транспортных средств (вертолётов, автомобилей, лодок, и т.д.).

Так как неголономные связи накладывают не только геометрические (голономные) ограничения, но и кинетические, то такие системы определены на многообразии

$$Q = M \times G,$$

где M — пространство форм;

G — групповой компонент.

Групповой компонент G описывает положение и ориентацию в пространстве моделируемого тела, как и в случае голономных связей, в то время как пространство форм M описывает внутренние переменные (например направление поворота колёс автомобиля).

Рассмотрим пример неголономной системы в виде катящегося диска (рисунок 3).

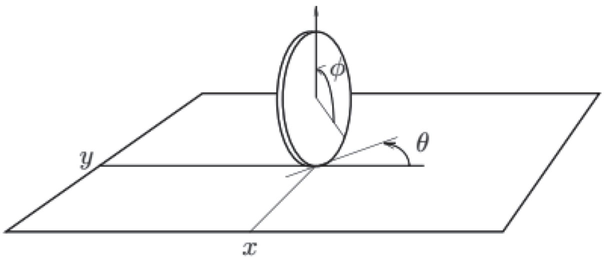


Рисунок 3. Катящийся диск
Figure 3. Rolling disc

Данный диск катится без скольжения по плоскости. Его конфигурация характеризуется такими переменными, как [7–9]:

- координаты *(x, y),* которые указывают на точку контакта диска с поверхностью;
- угол θ, демонстрирующий направленность относительно оси *x*;
- угол φ, который находится между вертикальной осью и выбранной радиальной осью на диске.

Из-за ограничения в виде условия отсутствия скольжения обобщённые скорости системы не могут принимать произвольное значение. В частности, имея радиус круга диска *r*, они должны удовлетворять ограничениям (4), тем самым указывая на необходимость, чтобы скорость центра диска находилась в средней плоскости диска:

$$\begin{aligned} \dot{x} - r \times \cos\theta\dot{\varphi} = 0 \\ \dot{y} - r \times \sin\theta\dot{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Мы не можем проинтегрировать данные кинематические условия, и, как итог, они не ограничивают возможные конфигурации диска. Чтобы удостовериться в этом, продемонстрируем два простых шага, которые всегда позволят нам перевести наш диск из конфигурации $(x_1, y_1, \theta_1, \varphi_1)$ в конфигурацию $(x_2, y_2, \theta_2, \varphi_2)$:

Первым шагом необходимо прокрутить диск, пока точка контакта с плоскостью из координат (x_1, y_1) не переместится в координаты (x_2, y_2), которые находятся на выбранной кривой длиной (5)

$$r \times (\varphi_2 - \varphi_1 + 2k\pi)\,, \quad (5)$$

где k — это любое число, целое и неотрицательное.

Вторым шагом мы переворачиваем диск вокруг вертикальной оси от угла θ_1 до угла θ_2.

Возможность осуществления данного алгоритма свидетельствует о неголономности двух ограничений (4), накладываемых на передвижения диска.

Источники возникновения неголономных связей

В данном разделе для большего понимания проблемы неголономных ограничений рассмотрим возможные источники кинетических связей.

Выделим три разных вида источника неголономии, а именно: качение без проскальзывания, сохранение углового момента в многотельных системах, а также специальное управление у робототехнических устройств.

И для начала приведём характерные примеры для первого вида источников неголономии [9–11]:

- трение качения, возникающие меж колёсами и плоскостью при движении колёсных роботов и некоторых категорий транспортных средств;
- ограничения при сложных манипуляциях роботизированной рукой, возникающие из-за скользящего контакта кончиков пальцев с предметами.

Второй вид, которому присущи неголономные связи, возникает в системах с множеством тел, которые не имеют фиксированной структуры. В таких системах сохранение углового момента привносит дифференциальную связь, которая не интегрируема. Как пример можно привести:

- роботы-манипуляторы в космических конструкциях;
- спутники с реактивными дисками (маховиками), которые используются для стабилизации траектории;
- прыгающие роботы в фазе полёта.

И третий вид, появляющийся при особой операции управления, применяемой в некоторых робототехнических структурах, может быть продемонстрирован на следующих примерах:

- подводные робототехнические системы, в которых ход вперёд разрешён только по указанному курсу;
- роботы-манипуляторы с одним или рядом пассивных суставов.

Отметим, что в данном случае неголономное поведение обусловлено доступной системой или избранной стратегией работы определённых элементов.

Так как иногда кинематические связи невозможно проинтегрировать, необходимо искать иные способы моделирования неголономных систем. Для этого можно использовать метод вариационного интегрирования, который полезен не только в неголономных системах, но также может быть эффективно использован при системе с голономными связями. Рассмотрим принцип его работы и преимущества.

Метод вариационного интегрирования

Обычно для моделирования используются вычислительные интеграторы, которые «продвигают» модель механической системы вперёд по времени. Использование данных интеграторов во многих случаях сводится к дискретизации дифференциальных уравнений, с помощью которых можно охарактеризовать траекторию передвижения механической системы. Это приводит к вычислению каждого следующего состояния во времени. Рассмотрим интеграторы, отличие которых в том, что они основаны на идее дискретизации геометрических вариационных принципов.

Идея вариационных интеграторов заключается в том, что схема временного шага должна выводиться из вариационного принципа, а не из результирующих дифференциальных уравнений. Главным среди вариационных принципов является принцип Гамильтона, идеей которого является, что путь q_t (с конечными точками q_{t0} и q_{t1}), пройденный механической системой, преобразует интеграл действия (6), то есть интеграл лагранжиана системы, равный разнице кинетической и потенциальной энергии системы.

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q,\dot{q})\,dt\,. \qquad (6)$$

Если говорить практически, то вариационные интеграторы, которые берут за основу принцип Гамильтона, сперва аппроксимируют интеграл по времени непрерывного лагранжиана квадратурой, функцией двух идущих подряд состояний q_k и q_{k+1} (соответствующих времени t_k и t_{k+1}) вида:

$$L(q_k,q_{k+1}) \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t))\,dt\,. \qquad (7)$$

Используя данный «дискретный лагранжиан», можно сформулировать дискретный принцип для некоторой траектории $\{q_0, \ldots, q_n\}$, определяемой последовательными положениями системы в моменты времени $t_k = kh$. Этот дискретный принцип требует, чтобы выполнялось тождество [4, 7, 9]:

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} L(q_k,q_{k+1}) = 0\,, \qquad (8)$$

где вариации берутся относительно каждого положения q_k на траектории.

Следовательно, если мы используем P_i для обозначения частной производной по i-ой переменной, мы должны иметь (9) для каждого из трёх положений q_{k-1}, q_{k+1}, q_k системы:

$$P_2L(q_{k-1},q_k) + P_1L(q_k,q_{k+1}) = 0\,. \qquad (9)$$

Следовательно, получаем, что это уравнение лежит в основе структуры интегрирования, которые высчитывают q_{k+1}, применяя два предшествующих значения q_k и q_{k-1}.

Приведём пример. Возьмём непрерывный лагранжиан вида (10), определим дискретный лагранжиан (11) и воспользуемся обозначением (12).

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M\dot{q} - V(q)\,, \qquad (10)$$

где V — потенциальная функция;

$$L(q_k,q_{k+1}) = h\mathcal{L}\left(q_{k+\frac{1}{2}}, \frac{q_{k+1}-q_k}{h}\right), \qquad (11)$$

$$q_{k+\frac{1}{2}} = \frac{q_k+q_{k+1}}{2}\,. \qquad (12)$$

В результате уравнение будет иметь вид (13), что является дискретным аналогом закона Ньютона (14):

$$M\,\frac{q_{k+1}-2q_k+q_{k-1}}{h^2} = -\frac{1}{2}(\nabla V(q_{k-\frac{1}{2}}) + \nabla V(q_{k+\frac{1}{2}}))\,, \qquad (13)$$

$$M\ddot{q} = -\nabla V(q)\,. \qquad (14)$$

Этот пример очень просто обобщается путём замены $q_{k+1/2}$ на (15) как квадратурной точки, которая используется для аппроксимации дискретного лагранжиана:

$$q_{k+\omega} = (1-\omega)\times q_k + \omega q_{k+1}\,. \qquad (15)$$

Может показаться, что использование вариационных интеграторов мотивировано только с математической точки зрения, но интеграторы, учитывающие вариационные свойства, показывают результаты лучше, улучшая числовые показатели и предотвращая многие практические проблемы.

В первую очередь, вариационные интеграторы достаточно точно сохраняют линейный и угловой моменты, гарантируя хорошее сохранение энергии в ходе экспоненциально продолжительного времени моделирования.

Во-вторых, интегралы любой точности могут быть получены обычной корректировкой квадратурных принципов.

В-третьих, вариационные интеграторы сохраняют в целостности симплектическую структуру системы, вследствие чего значительно улучшается обработка затуханий, которая практически не зависит от временного шага.

Вариационные интеграторы группы Ли

Выше мы уже указывали на то, что все классические интеграторы, включая также только что рассмотренные нами вариационные, в основе своей содержат идею продвижения численного решения вперёд по времени, при этом добавляя к его конфигурации некоторое значение смещения [9–11].

Тем не менее, некоторые системы имеют более сложные пространства конфигураций, к примеру абсолютно твёрдые тела, конфигурационное пространство которых представлено группой Ли *SE(3)*, именуемой евклидовой группой твёрдых движений. Представитель данной группы, как правило, описан в виде вектора и кодирует матрицу вращения, в то время как группа *(∈ SO(3))* используется для кодировки ориентации. Группа *SE(3)*, элементы *se(3)* (которые являются бесконечно малыми элементами *SE(3)*, то есть могут быть представлены как моментальные винтовые движения) сопряжённой с ней алгебры Ли и экспоненциальное отображение могут быть продуктивно применены в моделировании.

Говоря условно, интеграторы групп Ли сохраняют инвариантность движения и групповую структуру для систем с конфигурационным пространством группы Ли *G*. Алгебра Ли *g*, которая связана с пространством *G*, целью своей имеет кодирование обобщённой скорости и ускорения (следовательно то же самое и для обобщённых импульсов и сил).

Наряду с тем, что группы Ли ассоциируются с гладкими многообразиями, связанные с ней алгебры предполагают более простые, в сравнении, линейные пространства. Это знание упрощает интегрирование скорости даже для криволинейного пространства конфигураций. Интеграторы группы Ли нередко выражают изменённую конфигурацию в виде отображения, которое демонстрирует изменение в группе в терминах элементов её в алгебре Ли. Данное отображение именуется групповым разностным отображением и обозначать мы его будем символом τ.

Первые попытки использования отображения для задач интеграции проводились с помощью широко известного экспоненциального отображения. С той поры было доказано, что с помощью удержания структуры Ли и инвариантов движения при дискретизации можно значительно улучшить численные методы, которые при этом сохраняют верную динамику (даже при длительном интегрировании) и демонстрируют повышенную точность.

Применим ранее использованное обозначение для конфигурационного многообразия $Q = M \times G$, где G — группа Ли (с алгеброй Ли g). В случае, например, динамики некоторого транспортного средства (например, траектория движения автомобиля, ограниченная текущим углом поворота передних колёс) $G = SE(3)$ представляет из себя группу движений твёрдых сочленённых тел, а M — пространство внутренних переменных этого же транспортного средства.

Отметим, что состояние транспортного средства в данном случае целиком и полностью определяется точкой $q \in Q$ и его скоростью $\dot{q} \in T_q Q$ ($T_q Q$ в данном случае является касательным пространством к Q в точке q). Сутью же интеграторов групп Ли является то, что необходимо получить уравнение на приведённом пространстве $TQ \times g$ с помощью уравнения движения из изначального состояния TQ. Получается это путём перевода TQ в начало координат и формулировкой его в алгебре g. Полученное данным путём пространство линейно, поэтому можно использовать стандартные методы интегрирования.

Обратное преобразование к τ применяют для отображения кривых в алгебре обратно в группу. Для осуществления этого преобразования для любой группы Ли *G* обычно оперируют двумя стандартными типами групповых разностных отображений τ:

— Экспоненциальное отображение *exp: g → Q,* определяемое выражением *exp(*ξ) = γ(1), с γ: *R* → *Q* является интегральной кривой через тождество векторного поля, связанного с ξ ∈ *g* (следовательно, с $\dot{\gamma}(0)=\xi$);

— Канонические координаты второго рода *ccsk: g* → *Q* $ccsk(\xi)=\exp(\xi^1 e_1)\times\exp(\xi^2 e_2)\times$ $\times$ K $\times\exp(\xi^n e_n)$, где $\{e_i\}$ — базис алгебры Ли.

Продемонстрируем ещё одно отображение τ, именуемое отображением Кэли, но сразу заметим, что оно справедливо не для каждого случая, а только для ряда матричных групп. Применяется оно для матричных групп, которые используют такие группы жёсткого движения, как *SO(3), SE(2)* и *SE(3):*

$$cay: g \to G, cay(\xi)=(e-\frac{\xi}{2})^{-1}(e+\frac{\xi}{2}). \quad (16)$$

Хотя данное отображение даёт только приближение к интегральной кривой, определённой с помощью *exp*, было решено включить её, потому что она очень проста в исчислении, и, таким образом, приводит к более эффективной реализации.

Возможны и другие подходы, например с использованием ретракции и других безкоммутаторных методов. Однако мы ограничимся тремя вышеупомянутыми отображениями.

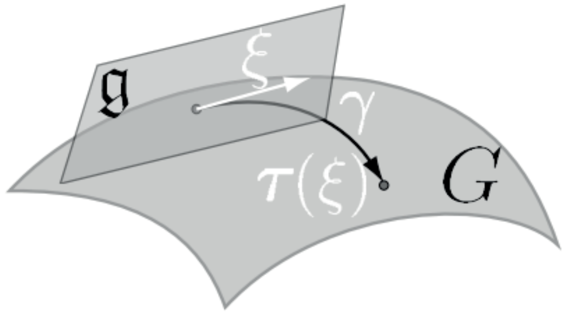


Рисунок 4. Пространство группы Ли G
Figure 4. Space of the Lie group G

Выводы

Нами рассмотрены особенности моделирования динамики движения двух классов механических систем: голономных и неголономных.

Учитывая особенности неголономных систем, было предложено рассмотреть способы, отличающиеся от методов, подразумевающих решения систем дифференциальных-алгебраических уравнений классическими интеграторами.

Рассматриваемые методы имеют название метода вариационного интегрирования и метода интегрирования групп Ли, которые в основе своей предполагают использование вариационных принципов. Они имеют ряд преимуществ перед другими методами, данные преимущества также были описаны.

Дальнейшая работа в рамках этой темы подразумевает более подробное рассмотрение метода вариационного интегрирования и метода групп Ли и дальнейшее построение моделей динамики движения механических систем с помощью полученных знаний.

Список литературы

1. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир,1965. 408 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 т. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
3. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголомных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
4. Zhilenkov A.A. High Productivity Numerical Computations for Gas Dynamics Modelling Based on DFT and Approximation. 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus), 2018. 400-403. doi: 10.1109/EIConRus.2018.8317117.
5. Sokolov S.S., Zhilenkov A.A., Chernyi S.G., Nyrkov A.P., Mamunts D.G. Dynamics Models of Synchronized Piecewise Linear Discrete Chaotic Systems of High Order // Symmetry. 2019. Vol. 11. No. 2. P. 236.
6. Марсден Д.Э., Уэст М. Дискретная механика и вариационные интеграторы // Acta Acta Numerica. 2001. С. 357-514.

7. Ivanov A.V., Zhilenkov A.A. (2018). The Use of IMU MEMS-Sensors for Designing of Motion Capture System for Control of Robotic Objects // 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). 2018. P. 890-893.

8. Бизяев И.А., Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика саней Чаплыгина на цилиндре // Нелинейная динамика. 2016. № 12 (4). С. 675-687.

9. Вынгра А.В., Комиссаров Д.Р., Черный С.Г. Физическое моделирование автоматизированной системы управления креном судна // Системы управления и обработки информации. 2020. № 3 (50). С. 40-49.

10. Chernyi S.G., Vyngra A.V., Erofeev P., Novak B.P. Analysis of the Starting Characteristics of the Complex Maritime Systems // Procedia Computer Science. International Conference on Computational Intelligence and Data Science, ICCIDS 2019. 2020. C. 2164-2171.

11. Zhilenkov A.A., Chernyi S.G. Automatic Estimation Of Defects In Composite Structures as Disturbances Based on Machine Learning Classifiers Oriented Mathematical Models with Uncertainties // Journal of Information Technologies and Computing Systems. 2020. No. 3. P. 13-29.

References

1. Lantsosh K. *Variatsionnye printsipy mekhaniki* [Variational Principles of Mechanics]. Moscow, Mir Publ.,1965. 408 p. [in Russian].

2. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: v 10 t.* [Theoretical Physics: in 10 vol.]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. 736 p. [in Russian].

3. Neimark Yu.I., Fufaev N.A. *Dinamika negolomnykh system* [Dynamics of Non-Breaking Systems]. Moscow, Nauka Publ.,1967. 519 p. [in Russian].

4. Zhilenkov A.A. High Productivity Numerical Computations for Gas Dynamics Modelling Based on DFT and Approximation. *2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus),* 2018, pp. 400-403. doi: 10.1109/EIConRus.2018.8317117.

5. Sokolov S.S., Zhilenkov A.A., Chernyi S.G., Nyrkov A.P., Mamunts D.G. Dynamics Models of Synchronized Piecewise Linear Discrete Chaotic Systems of High Order. *Symmetry*, 2019, Vol. 11, No. 2, pp. 236.

6. Marsden D.E., Uest M. Diskretnaya mekhanika i variatsionnye integratory [Discrete Mechanics and Variational Integrators]. *Acta Acta Numerica*, 2001, pp. 357-514. [in Russian].

7. Ivanov A.V., Zhilenkov A.A. The Use of IMU MEMS-Sensors for Designing of Motion Capture System for Control of Robotic Objects. *2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus)*, 2018, pp. 890-893.

8. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. Dinamika sanei Chaplygina na tsilindre [Dynamics of Chaplygin Sleigh on a Cylinder]. *Nelineinaya dinamika — Nonlinear Dynamics*, 2016, No. 12 (4), pp. 675-687. [in Russian].

9. Vyngra A.V., Komissarov D.R., Chernyi S.G. Fizicheskoe modelirovanie avtomatizirovannoi sistemy upravleniya krenom sudna [Physical Simulation of Automated System of Vessel’s List Control]. *Sistemy upravleniya i obrabotki informatsii — Control Systems and Information Processing,* 2020, No. 3 (50), pp. 40-49. [in Russian].

10. Chernyi S.G., Vyngra A.V., Erofeev P., Novak B.P. Analysis of the Starting Characteristics of the Complex Maritime System. *Procedia Computer Science. International Conference on Computational Intelligence and Data Science, ICCIDS 2019*, 2020, pp. 2164-2171.

11. Zhilenkov A.A., Chernyi S.G. Automatic Estimation of Defects in Composite Structures as Disturbances Based on Machine Learning Classifiers Oriented Mathematical Models with Uncertainties. *Journal of Information Technologies and Computing Systems,* 2020, No. 3, pp. 13-29.