

UDC 534.013

**ON DRILL-STRING NATURAL TORSIONAL VIBRATIONS**

**О СОБСТВЕННЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БУРИЛЬНОЙ  
КОЛОННЫ**

**A.G. Khakimov, E.I. Satyev**

**FSBSI Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Scientific Centre, Russian  
Academy of Sciences, Ufa, the Russian Federation**

**ХАКИМОВ А.Г., САТЫЕВ Э.И.**

**ФГБУН Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, г. Уфа,  
Российская Федерация  
e-mail: hakimov@anrb.ru**

**Abstract.** When drilling oil wells, drill-pipe strings are the main components that constrain reliability and efficiency of drilling rigs. The highest number of drill-string failures is caused by pipe parting. It is suggested that pipe-parting failures are preceded by the formation of a portion having a through-thickness radial lengthwise cut or a notched portion with a smaller cross-sectional area. Neither lengthwise cut nor crack in the rod can be determined using natural frequencies of longitudinal or flexural vibrations, because in the zone of the cut there is no reduction of the area and axial moments of inertia in the rod's cross section. Therefore, this article deals with natural torsional vibrations of a drill string having damages as a through-thickness radial lengthwise cut and as a lateral notch. It has been found that in the case of the cut or the notch located within the vibration node, natural frequencies do not depend on the lengths of these damages. As the length of the cut or the notch increases, the lower frequencies of natural torsional vibrations will decrease. For the drill-string lengthwise through-thickness cut, changes in the natural torsional vibration frequencies are considerable as compared to similar frequencies for the drill

string having a lateral notch. Using two natural torsional vibration frequencies, we can determine the initial coordinate and length of the through-thickness radial lengthwise cut on the drill string. Using three natural torsional vibration frequencies, we can determine the coordinate, length and parameter of the notch.

**Аннотация.** При строительстве скважин основным элементом, ограничивающим надежность и работоспособность бурильной установки, является бурильная колонна. Наибольшее число отказов бурильных колонн вызвано обрывами бурильных труб. Предполагается, что обрыву бурильной трубы предшествует появление участка с продольным сквозным радиальным разрезом или участка с надрезом с меньшей площадью поперечного сечения. Продольный разрез или трещина в стержне не определяется по собственным частотам продольных или изгибных колебаний, так как в зоне разреза не происходит уменьшение площади и осевых моментов инерции поперечного сечения стержня. Поэтому здесь рассматриваются собственные крутильные колебания бурильной колонны с повреждением в виде продольного сквозного радиального разреза и с дефектом в виде надреза. Получено, что при расположении разреза или надреза в узле колебаний собственные частоты не зависят от длины разреза или надреза. С возрастанием длины разреза или надреза низшие частоты собственных крутильных колебаний уменьшаются. Для продольного сквозного разреза бурильной колонны изменения собственных частот крутильных колебаний значительны по сравнению с изменениями аналогичных частот для бурильной колонны с поперечным надрезом. По двум собственным частотам крутильных колебаний определяются начальная координата и длина продольного сквозного радиального разреза бурильной колонны. По трем собственным частотам крутильных колебаний определяются координата, длина и параметр надреза бурильной колонны.

**Key words:** drill string, natural frequencies, torsional vibrations, through-thickness radial lengthwise cut, length of cut, initial coordinate of cut, lateral notch, length of notch, coordinate of notch, notch parameter.

**Ключевые слова:** бурильная колонна, собственные частоты, крутильные колебания, продольный радиальный сквозной разрез, длина разреза, начальная координата разреза, поперечный надрез, длина надреза, координата надреза, параметр надреза.

## **Introduction**

When drilling oil wells, drill-pipe strings are the main components that constrain reliability and efficiency of drilling rigs. The highest number of drill-string failures is caused by pipe parting. It is suggested that pipe-parting failures are preceded by the formation of a portion having a through-thickness radial lengthwise cut or a notched portion with a smaller cross-sectional area. There are many research works devoted to the problem of damage identification in rods, beams and other more complex structures of this type, including the publications by M.A. Ilgamov [1], A.O. Vatulyan, N.O. Soluyanov [2, 3], G. Biscontin, A. Morassi, P. Wendel [4], M.I. Friswell [5], G.M.L. Gladwell [6], D. Benatar, D. Rittel, A.L. Yarin [7], A.P. Bovsunovskiy, O.A. Bovsunovskiy [8], G.F. Safina [9], V.A. Akopyan, A.V. Cherpakov, E.V. Rozhkov, A.N. Solovyev [10] and others. Sufficiently comprehensive analysis of these publications is done in recent reviews [3, 6, 10]. In [3], the solution is given for determining the variable cross-sectional area along the longitudinal section from the known dependence of the bar's free-end displacement on the perturbing force frequency. Paper [10] describes an integral criterion to identify damages in the components of bar structures and makes it possible to determine not only their presence and location, but also the degree of damage. Paper [11] presents quantitative research on the reflection from pipe damages in the range of frequencies

between 10 and 300 kHz. The results show that the coefficient of reflection from axisymmetric cracks increases monotonously with depth at all frequencies and depth-dependent frequency rising. The author's previous publications consider flexural and longitudinal natural vibrations of a finite-length bar having a lateral notch, and torsional vibrations of a shaft having a lengthwise through-thickness cut, for example, in [12]. In the case of finite-length rods, damages can be identified using changes in the range of natural longitudinal vibration frequencies in a vertical rod [13]. Neither lengthwise cut nor crack in the rod can be determined using natural frequencies of longitudinal or flexural vibrations, because in the zone of the cut there is no reduction of the area and axial moments of inertia in the rod's cross section. Therefore, this article deals with natural torsional vibrations of a drill string having damages as a through-thickness radial lengthwise cut and as a lateral notch. The cut simulates the damage as a lengthwise through-thickness radial crack.

### **Statement of the problem**

The drill string is fastened at its upper and lower ends to elastic bearings with the torsional stiffness  $c_1$  and  $c_2$  and connected at its ends to discs with the moments of inertia  $J_1$  and  $J_2$  (Figure 1). Consideration is given only to the stress-strain state within the elastic limit for a drill string. Since the crack results from a small nucleus, not necessarily in the most stressed section, the cut is assumed to be found at any place along the drill-string length. The problem lies in determining the initial coordinate of the cut and its length, while in the case with the notch we need to determine its coordinate, length and parameter.

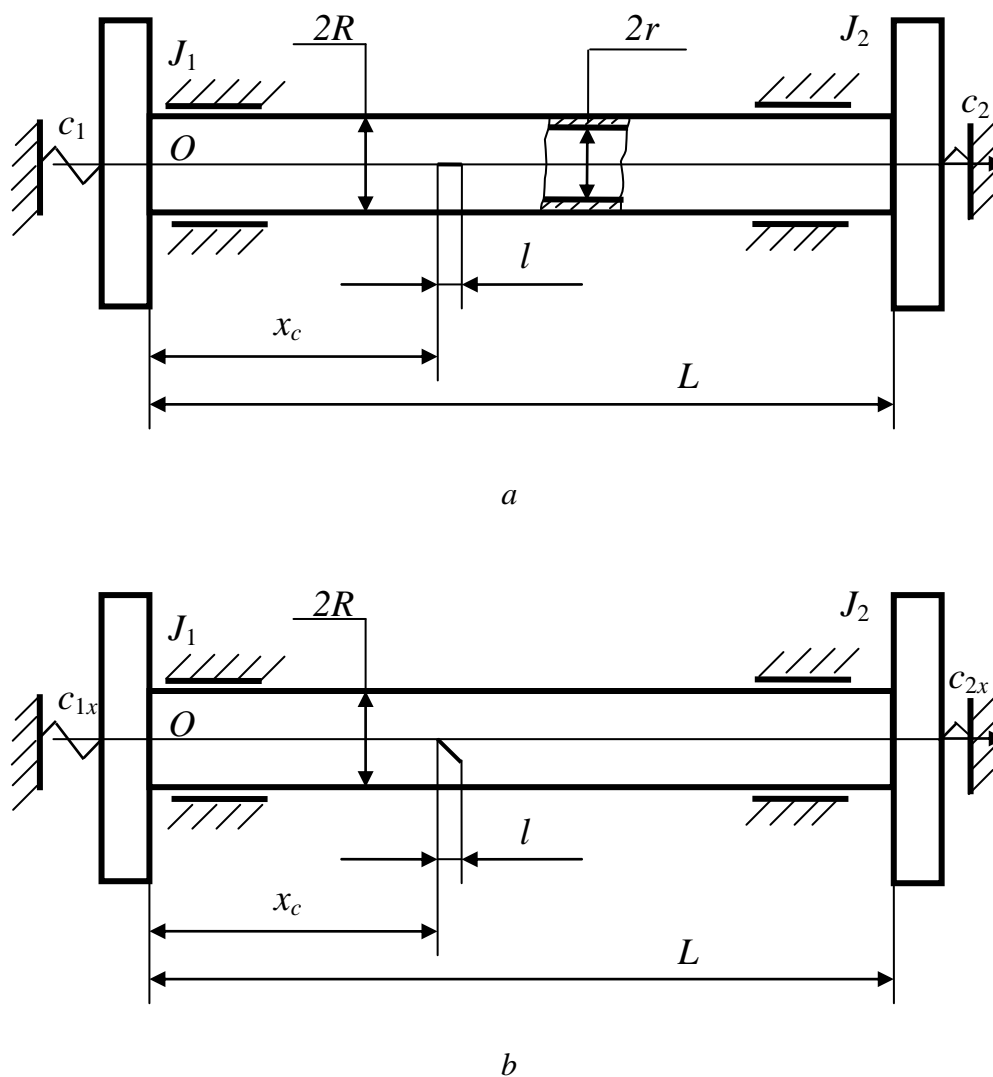


Figure 1. The design scheme: a) cut-type damage, b) notch-type damage

Let us denote the length, polar moment of inertia and stiffness parameter of the cross section in the undamaged portion of the rod with  $L, J_p, J_k$  the shear modulus and density with  $G, \rho$ , the length of damage with  $l$ , the polar moment of inertia and stiffness parameter of the cross section in the damaged zone of the rod [14] with  $j_p, j_k$ , its initial coordinate with  $x_c$ , and the angle of rotation and torsion moment in the drill-string section with  $\varphi, M$ . The following dependence is taken to be between the torsion moment  $M$  and relative torsional angle  $\theta$  :

$$M = GJ_k \theta, \quad \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

According to what has been said, we have:

$$GJ_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad M = GJ_k \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (1)$$

Let us measure the coordinate  $x$  from the fastening point and write down the boundary conditions:

$$M = c_1 \varphi + J_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (x=0), \quad M = -c_2 \varphi - J_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (x=L). \quad (2)$$

There is a complex spatial stress-strain state within and near the cut of short length  $l$ , but we apply the plane-section hypothesis. Denoting the functions in the domains  $0 \leq x \leq x_c$ ,  $x_c \leq x \leq x_c + l$ ,  $x_c + l \leq x \leq L$  with indices 1, 2, 3, respectively, let us write down the conditions for coupling solutions at  $x = x_c$  and  $x = x_c + l$  (conditions for the equality of torsion moments and torsional angles), namely, for the drill string with a circular cross section [14] having notch-type damage:

$$J_k = J_p = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}, \quad j_p \leq J_p, \quad m = \frac{j_k}{J_k}, \quad m_p = j_p / J_p$$

having cut-type damage:

$$J_k = J_p = \frac{\pi R^4}{2} \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right), \quad j_k = \frac{\pi}{3} (R-r)^3 (R+r), \quad j_p = J_p,$$

$$m = \frac{j_k}{J_k} = \frac{2(R-r)^2}{3(R^2 + r^2)}, \quad m_p = 1,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = m \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad (x = x_c), \quad (3)$$

$$m \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \varphi_3, \quad (x = x_c + l). \quad (4)$$

Six constants in this solution written down for the domains  $0 \leq x \leq x_c$ ,  $x_c \leq x \leq x_{cl}$  and  $x_{cl} \leq x \leq L$ , ( $x_{cl} = x_c + l$ ) are determined from six boundary conditions (2)-(4). In order for  $A_i, B_i$  ( $i = 1 \div 3$ ) not to be zero simultaneously, the determinant should equal zero with its non-zero elements written down in the form

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{1x} - J_1 \omega_t^2, a_{12} = -GJ_k \alpha_1, a_{25} = (-c_{2x} + J_2 \omega_t^2) \cos(\alpha_3 L) + GJ_k \alpha_3 \sin(\alpha_3 L), \\ a_{26} &= (-c_{2x} + J_2 \omega_t^2) \sin(\alpha_3 L) - GJ_k \alpha \cos(\alpha_3 L), \\ a_{31} &= \sin(\alpha_1 x_c), a_{32} = -\cos(\alpha_1 x_c), a_{33} = -\sqrt{m_p m_k} \sin(\alpha_2 x_c), \\ a_{34} &= \sqrt{m_p m_k} \cos(\alpha_2 x_c), \\ a_{41} &= \cos(\alpha_1 x_c), a_{42} = \sin(\alpha_1 x_c), a_{43} = -\cos(\alpha_2 x_c), a_{44} = -\sin(\alpha_2 x_c), \\ a_{53} &= \alpha_1 \sqrt{m_p m_k} \sin(\alpha_2 x_{cl}), a_{54} = -\alpha_1 \sqrt{m_p m_k} \cos(\alpha_2 x_{cl}), a_{55} = -\alpha_3 \sin(\alpha_3 x_{cl}), \\ a_{56} &= \alpha_3 \cos(\alpha_3 x_{cl}), a_{63} = \cos(\alpha_2 x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha_2 x_{cl}), \\ a_{65} &= -\cos(\alpha_3 x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha_3 x_{cl}). \end{aligned}$$

The frequency equation is not given here because of its awkwardness. If the partial solution is taken in the amplitude form  $\varphi = C_i \sin(\alpha_i x + \delta_i) \sin \omega_t t$ , the frequency equation, on eliminating six constants  $C_i, \delta_i$  ( $i = 1 \div 3$ ), will be written down in the form

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left\{ \alpha_2 x_{cl} + \operatorname{arctg} \left[ m \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left( \alpha_1 x_c + \operatorname{arctg} \frac{GJ_k \alpha_1}{c_{1x} - J_1 \omega_t^2} \right) \right] - \alpha_2 x_c \right\} = \\ & = m \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left( \alpha_3 x_{cl} + \operatorname{arctg} \frac{GJ_k \alpha_3}{-c_{2x} + J_2 \omega_t^2} - \alpha_3 L \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \omega_t / a_1 = \omega_t \sqrt{\rho J_p / GJ_k}, \alpha_2 = \alpha_1 \sqrt{m_p / m}.$$

When stiffness coefficients  $c_1$  and  $c_2$  are  $\rightarrow \infty$  or equal zero together with the moments of inertia  $J_1$  and  $J_2$ , the frequency equation will be simplified.

## Cut-type damage

Thus, the simplest model of a cut given above has its initial coordinate  $x_c$  and length  $l$ . The initial coordinate of the cut  $x_c$  and its length are known in the primal problem, in the inverse problem we should determine these values. In order to determine  $x_c$ ,  $l$ , it is necessary to analyze natural frequencies of torsional vibrations of the shaft having the cut.

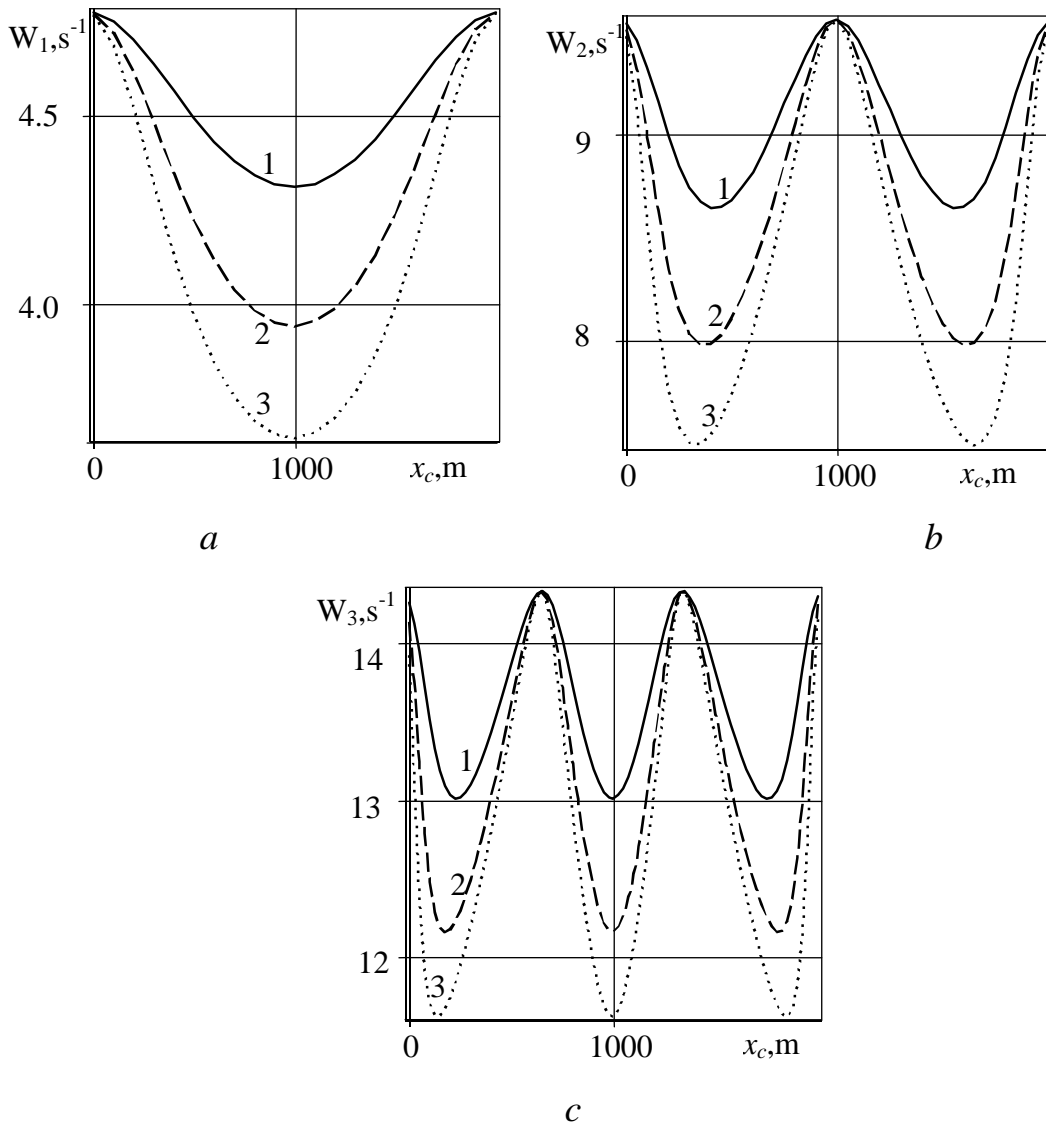


Figure 2. Dependences of the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$  (fragment a),  $\omega_2$  (fragment b) and  $\omega_3$  (fragment c) on the cut coordinate  $x_c$  for different lengths  $l$  (curve 1-1; 2-2; 3-3 m)



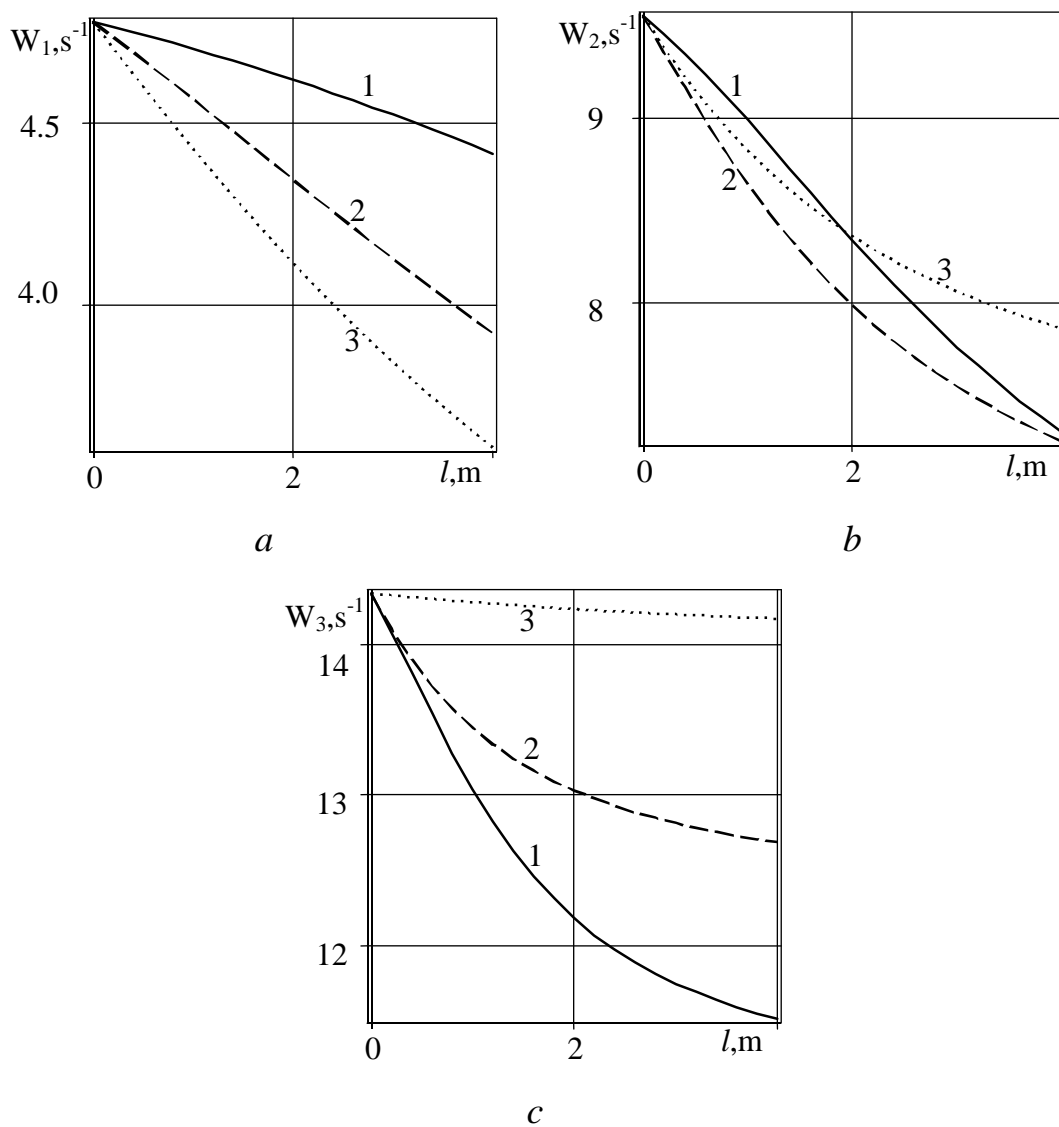


Figure 3. Dependences of the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$  (fragment *a*),  $\omega_2$  (fragment *b*) and  $\omega_3$  (fragment *c*) on the cut length  $l$  for different values of the cut coordinate  $x_c$  (curve 1-200; 2-400; 3-600 m)

## Primal problem

The solution to equation (5) has been performed for the following parameters of the system:  $G=0.77 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>,  $a = 3141.9$  m/s,  $L=2000$  m,  $R=84.137$  mm,  $r=74.95$  mm,  $m=0.004431705391$ ,  $c_1=c_2=0$ ,  $J_1=10$  kgm<sup>2</sup>,  $J_2=5$  kgm<sup>2</sup>. In this case the first, second and third natural frequencies of the drill string without a cut are  $\omega_1 = 4.777912896$  1/s,  $\omega_2 = 9.556837670$  1/s and  $\omega_3 = 14.33773996$  1/s. For the drill string with a cut at  $x_c=200$  m,  $l = 1$  m, the solution to the primal problem gives that the drill-string circular torsional vibration frequencies are  $\omega_1 = 4.704178234$  1/s,  $\omega_2 = 8.991891796$  1/s and  $\omega_3 = 13.03492495$  1/s. As can be seen, the through-thickness lengthwise radial cut 1 m long causes a considerable reduction in the first three frequencies of the drill-string free torsional vibrations. Figure 2 shows the dependences of the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$  (fragment *a*),  $\omega_2$  (fragment *b*) and  $\omega_3$  (fragment *c*) on the cut coordinate  $x_c$  for different lengths  $l$  (curve 1-1; 2-2; 3-3 m). These dependences have periodic patterns. It should also be noted that in the case of locating the cut within the vibration node, natural frequencies do not depend on its length. Figure 3 shows the dependences of the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$  (fragment *a*),  $\omega_2$  (fragment *b*) and  $\omega_3$  (fragment *c*) on the length of the cut  $l$  for different values of the cut coordinate  $x_c$  (curve 1-200; 2-400; 3-600 m). The figures show that as the length of the cut increases, three lower natural torsional vibration frequencies will decrease. It has been obtained that changes in natural torsional vibration frequencies of the drill string having a lengthwise through-thickness cut are sufficiently high as compared to changes in natural torsional vibration frequencies of the drill string having a cross sectional notch.

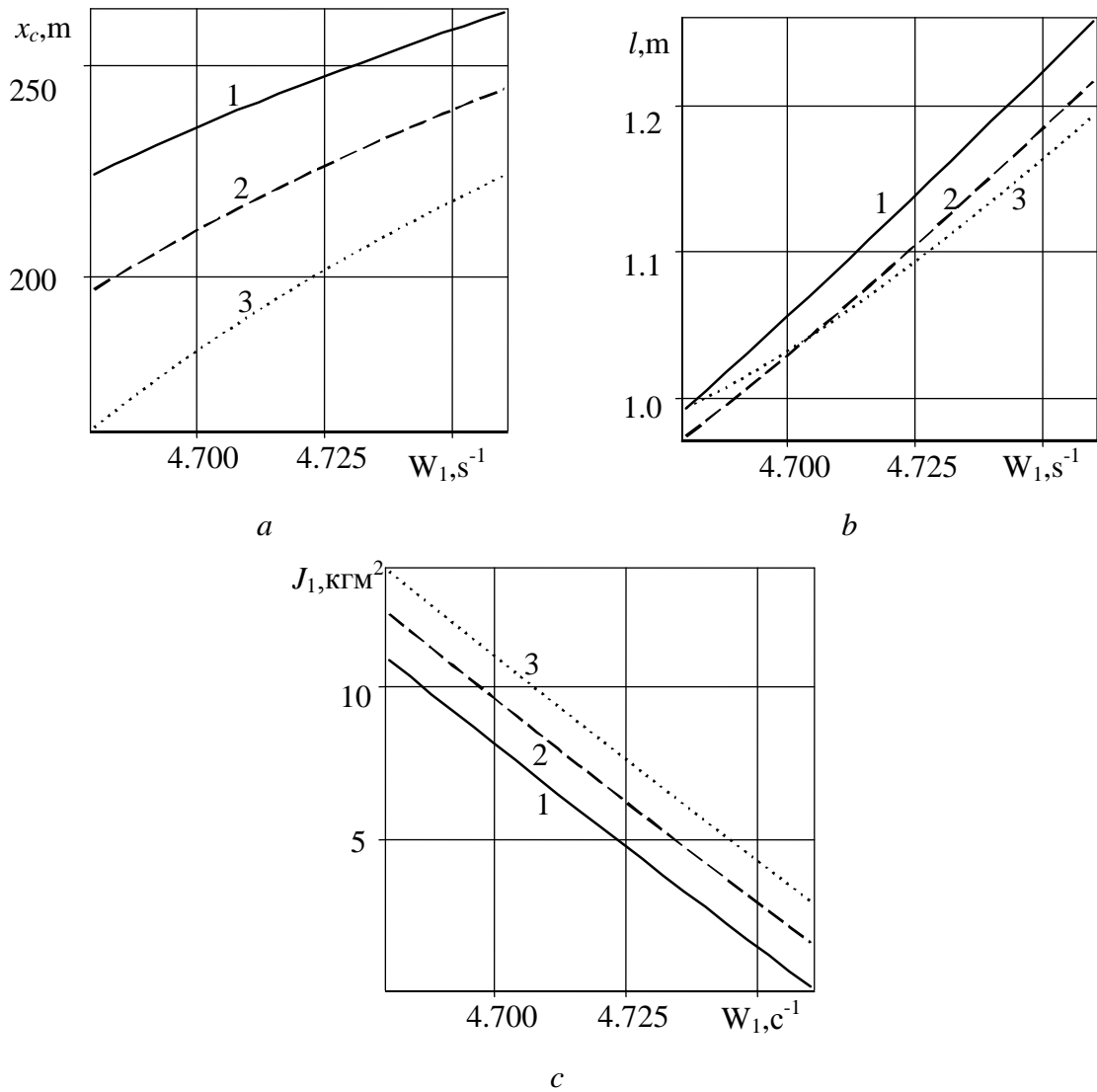


Figure 4. Dependences of the coordinate of the cut  $x_c$  (fragment *a*), its length  $l$  (fragment *b*) and moment of inertia  $J_1$  (fragment *c*) on the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$ , for  $\omega_3 = 13$  1/s,  $\omega_2 = 8.90$  1/s (curve 1),  $\omega_2 = 8.95$  1/s (curve 2) and  $\omega_2 = 9.00$  1/s (curve 3)

### Inverse problem

Writing down the frequency equation for three frequencies of free torsional vibrations, we can use the resulting set of equations to determine the coordinate of the cut  $x_c$ , its length  $l$  and moment of inertia  $J_1$ . For example, for the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1 = 4.7$  1/s,  $\omega_2 = 8.9$  1/s,  $\omega_3 = 13$  1/s the solution of the inverse problem gives that the drill string has a cut at  $x_c = 235.2197640$  m,  $l = 1.056191668$  m,  $J_1 = 8.130607888$  kgm<sup>2</sup>.

Figure 4 shows the dependences of the cut coordinate  $x_c$  (fragment a), its length  $l$  (fragment b) and moment of inertia  $J_1$  (fragment c) on the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$ , for  $\omega_3 = 13$  1/s  $\omega_2 = 8.90$  1/s (curve 1),  $\omega_2 = 8.95$  1/s (curve 2),  $\omega_2 = 9.00$  1/s (curve 3).

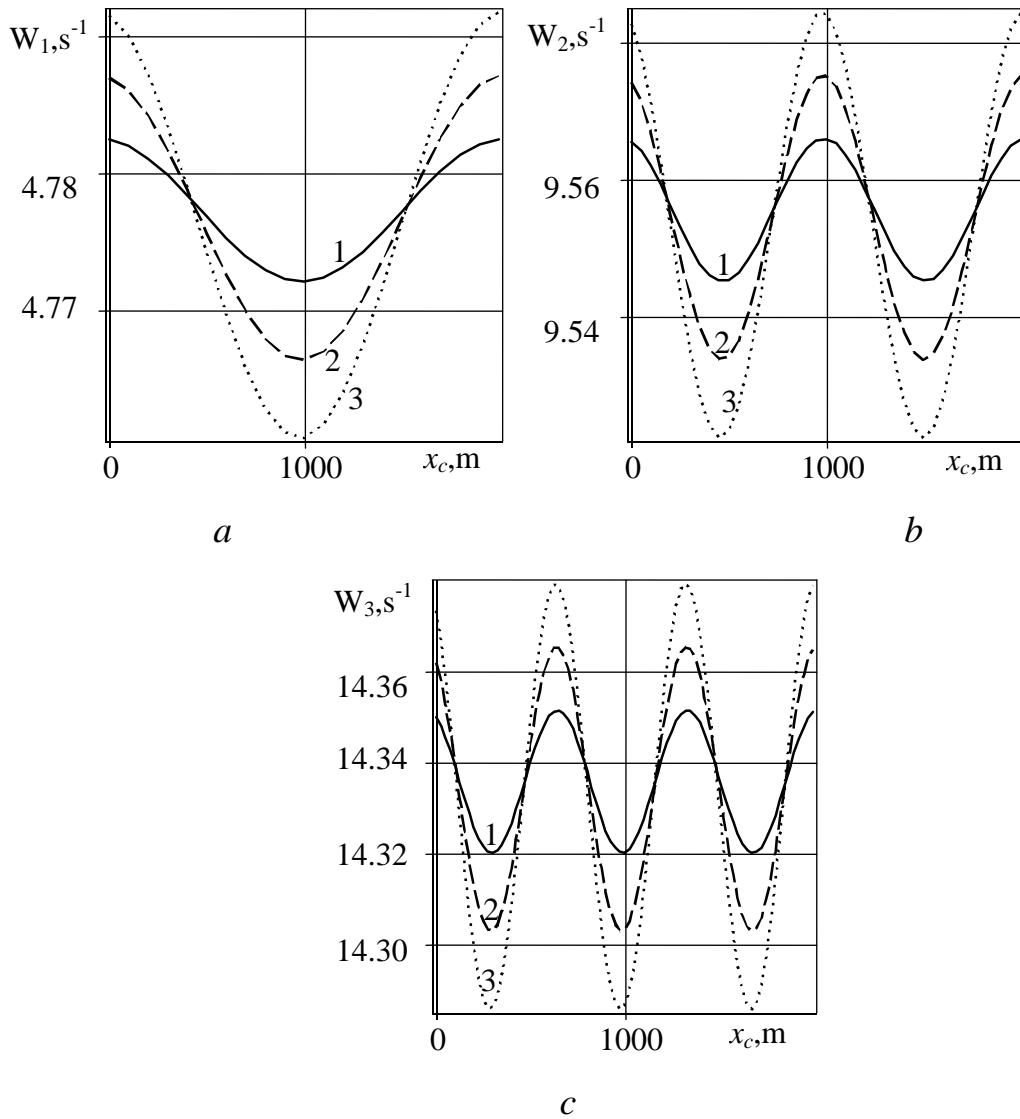


Figure 5. Dependences of the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$  (fragment a),  $\omega_2$  (fragment b),  $\omega_3$  (fragment c) on the notch coordinate  $x_c$  for different lengths  $l$  (curve 1-10; 2-20; 3-30 m) at  $m_p = m_k = 0.8$

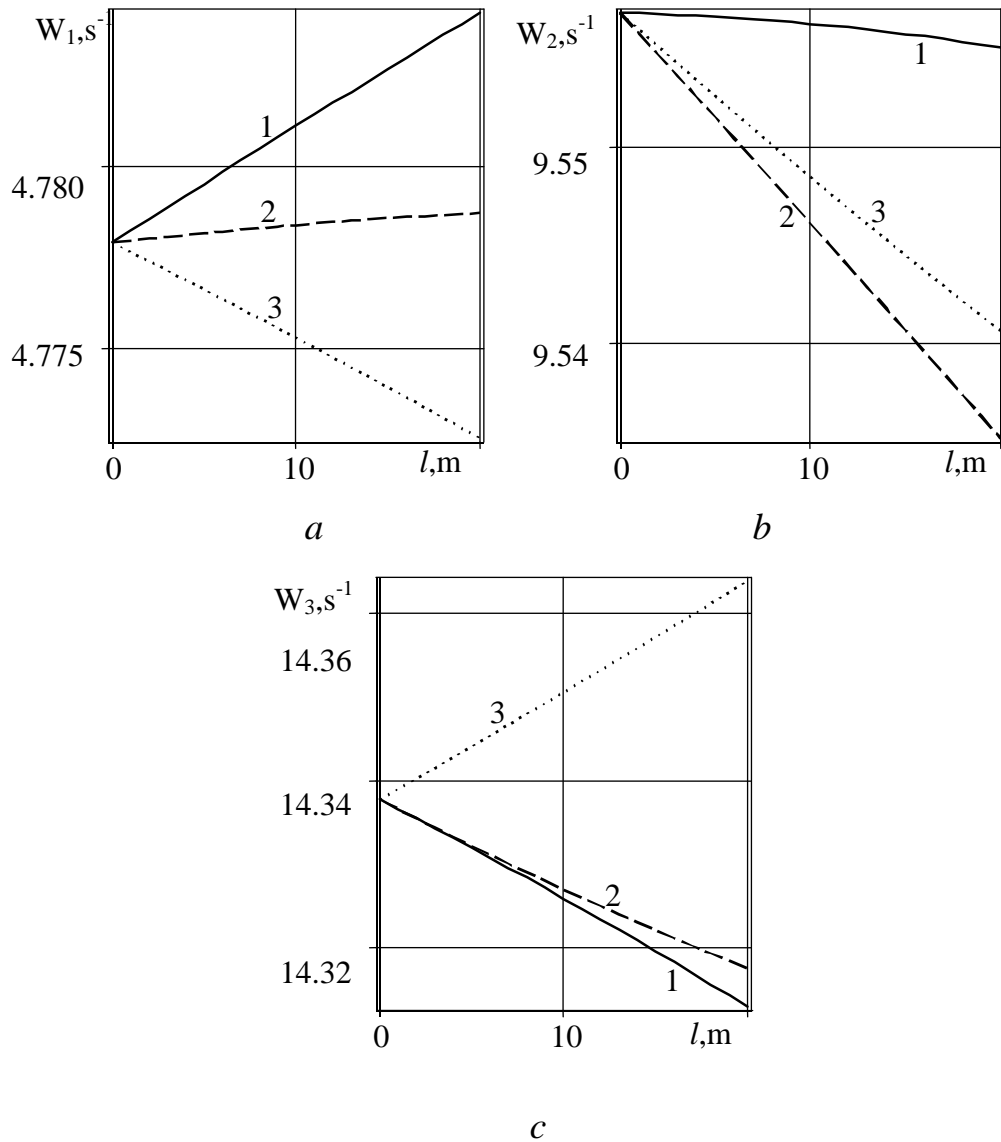


Figure 6. Dependences of the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$  (fragment *a*),  $\omega_2$  (fragment *b*),  $\omega_3$  (fragment *c*) on the notch length  $l$  for different values of the notch coordinate  $x_c$  (curve 1-200; 2-400; 3-600 m) at  $m_p = m_k = 0.8$

### Notch-type damage

The simplest damage model given above includes the initial coordinate, length  $l$  and parameters  $m_k$  and  $m_p$ . In the primal problem the damage initial coordinate  $x_c$ , length  $l$  and parameters  $m_k$  and  $m_p$  are known; in the inverse problem these values should be determined. In order to determine  $x_c$ ,  $l$ ,  $m_k$  and  $m_p$ , it is necessary to analyze natural torsional vibration frequencies of the damaged shaft. For axisymmetric damage (notch)  $m_k = m_p$ .

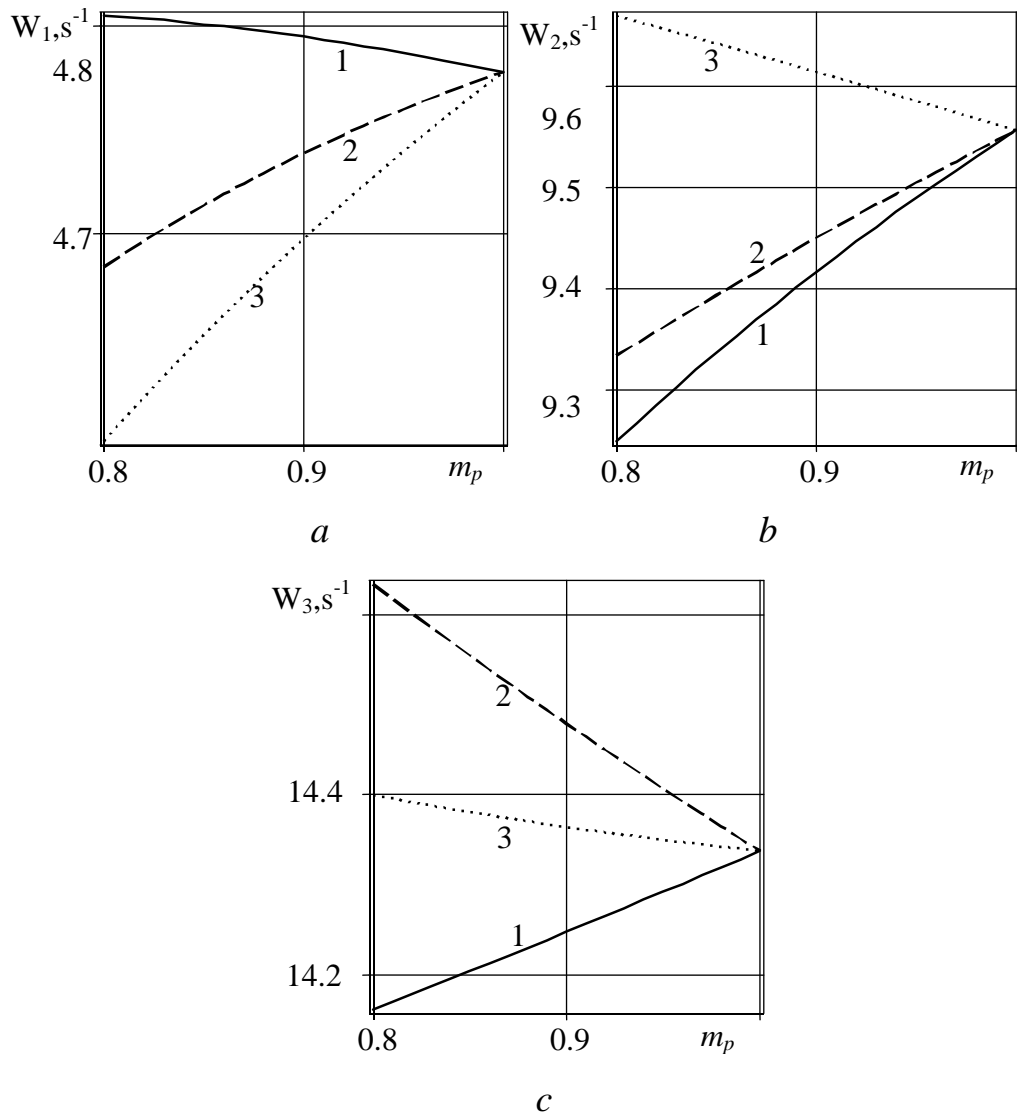


Figure 7. Dependences of the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$  (fragment *a*),  $\omega_2$  (fragment *b*) and  $\omega_3$  (fragment *c*) on the parameter  $m_p$  ( $m_p=m_k$ ) for different values of the notch coordinate  $x_c$  (curve 1-200; 2-400; 3-600 m) at the notch length  $l=10$  m

### Primal problem

The solution to equation (5) has been numerically performed for the following parameters of the system:  $G=0.77 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>,  $a = 3141.9$  m/s,  $L=2000$  m,  $R=84.137$  mm,  $r=74.95$  mm,  $c_1=c_2=0$ ,  $J_1=10$  kgm<sup>2</sup>,  $J_2=5$  kgm<sup>2</sup>. Figure 5 shows the dependences of the drill-string circular torsional vibrations  $\omega_1$  (fragment *a*),  $\omega_2$  (fragment *b*),  $\omega_3$  (fragment *c*) on the notch coordinate  $x_c$  for different lengths  $l$  (curve 1-10; 2-20; 3-30 m) at  $m_p = m_k=0.8$ . These dependences have periodic patterns. It should also be noted that in the case of locating the cut within the vibration node, natural frequencies do not

depend on its length. Figure 3 shows the dependences of the drill-string circular torsional vibration frequencies on the notch length. Figure 6 shows the dependences of the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$  (fragment *a*),  $\omega_2$  (fragment *b*),  $\omega_3$  (fragment *c*) on the notch length  $l$  for different values of the notch coordinate  $x_c$  (curve 1-200; 2-400; 3-600 m) at  $m_p = m_k = 0.8$ . Figure 7 shows the dependences of the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$  (fragment *a*),  $\omega_2$  (fragment *b*),  $\omega_3$  (fragment *c*) on the parameter  $m_p$  ( $m_p = m_k$  for different values of the notch coordinate  $x_c$  (curve 1-200; 2-400; 3-600 m) at the notch length  $l = 10$  m.

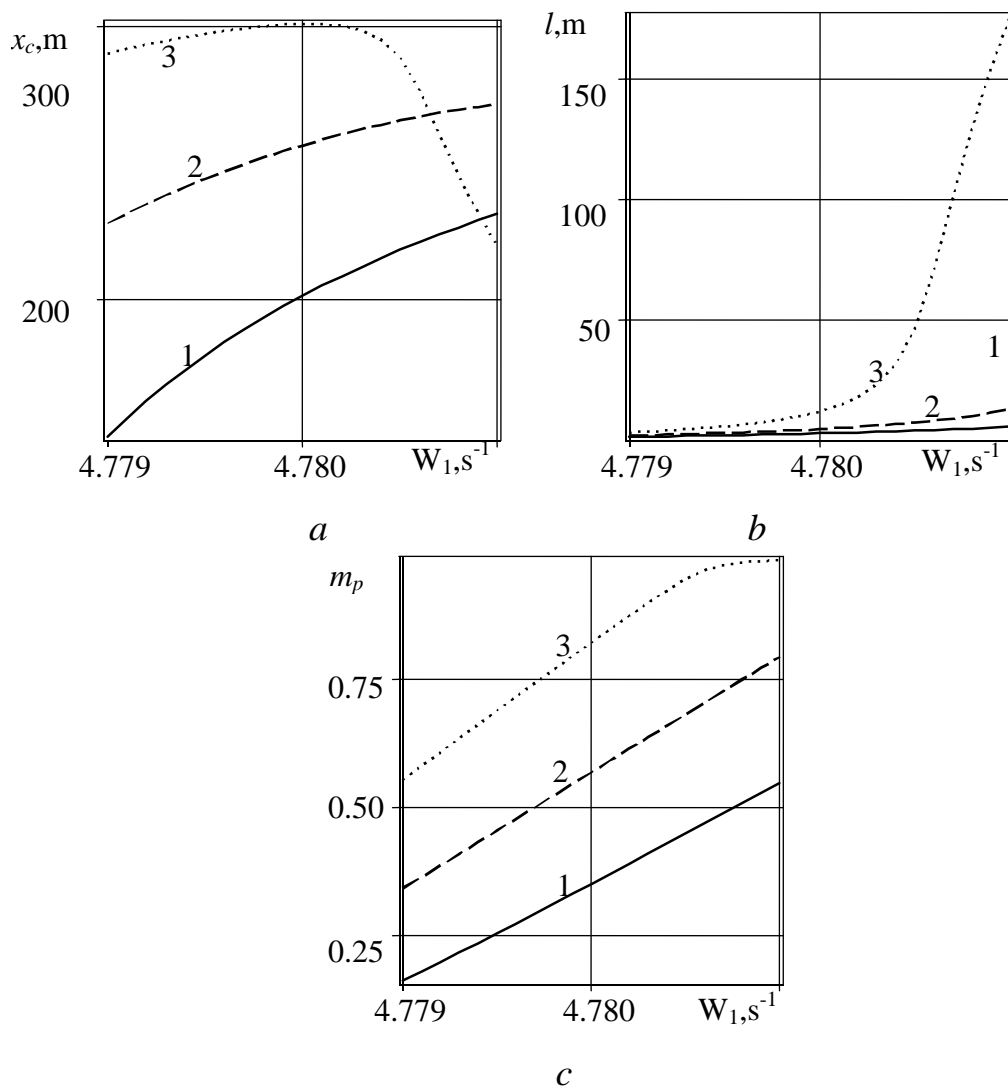


Figure 8. Dependences of the notch coordinate  $x_c$  (fragment *a*), its length  $l$  (fragment *b*) and parameter  $m_p$  (fragment *c*) on the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$ , for  $\omega_2 = 9.55$  1/s,  $\omega_3 = 14.310$  1/s (curve 1),  $\omega_3 = 14.315$  1/s (curve 2),  $\omega_3 = 14.320$  1/s (curve 3)

## Inverse problem

Writing down the frequency equation for three frequencies of free torsional vibrations, we can use the resulting set of equations to determine the notch coordinate  $x_c$ , its length  $l$  and parameter  $m_k=m_p$ . For example, for the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1=4.779 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_2=9.55 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_3=14.31 \text{ s}^{-1}$  the solution of the inverse problem gives that the drill string has the notch coordinate  $x_c = 248.778 \text{ m}$ , its length  $l = 12.593 \text{ m}$  and parameter  $m_k=m_p = 0.745$ .

Figure. 8 shows the dependences of the notch coordinate  $x_c$  (fragment *a*), its length  $l$  (fragment *b*) and parameter  $m_p$  (fragment *c*) on the drill-string circular torsional vibration frequencies  $\omega_1$ , for  $\omega_2 = 9.55 \text{ 1/s}$ ,  $\omega_3 = 14.310 \text{ 1/s}$  (curve 1),  $\omega_3 = 14.315 \text{ 1/s}$  (curve 2) and  $\omega_3 = 14.320 \text{ 1/s}$  (curve 3).

## Conclusions

The dependences of natural circular vibration frequencies on the cut or notch coordinate have periodic patterns. It has been found that in the case of locating the cut or the notch within the vibration node, natural longitudinal vibration frequencies do not depend on their lengths. As the length of the cut or the notch increases, the lower frequencies of natural torsional vibration frequencies will decrease.

Using two natural frequencies of torsional vibrations, we can determine the initial coordinate and the length of the through-thickness radial lengthwise cut on the drill string. Using three natural torsional vibration frequencies, we can determine the coordinate, length and parameter of the notch. The research performed shows that changes in the natural torsional vibration frequencies are *considerable* as compared to those in the drill string having a lateral notch.

The investigation was partially financed by the Russian Foundation for Basic Research (Projects 14-01-97010-r\_povolzhie\_a, 14-01-97013-r\_povolzhie\_a, 14-01-00740\_a).



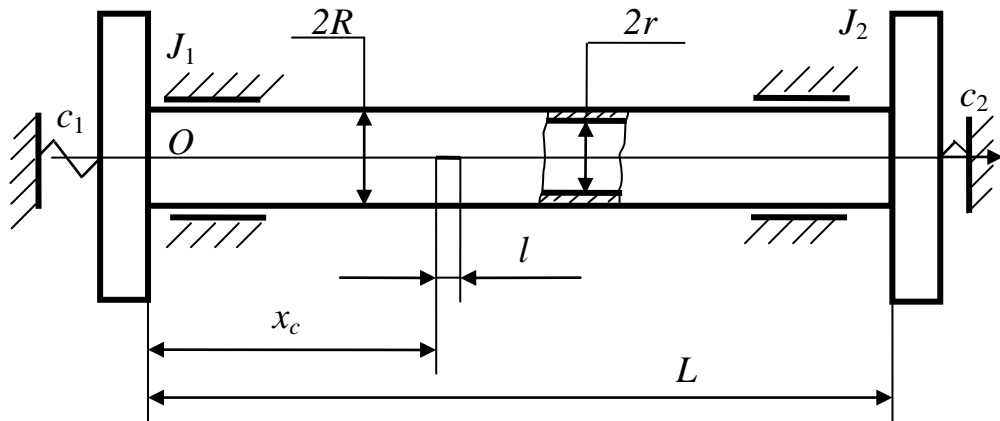
## Введение

При строительстве скважин основным элементом, ограничивающим надежность и работоспособность бурильной установки, является бурильная колонна. Наибольшее число отказов бурильных колонн вызвано обрывами бурильных труб. Предполагается, что обрыву бурильной трубы предшествует появление участка с продольным сквозным радиальным разрезом или участка с надрезом с меньшей площадью поперечного сечения. Решению проблемы идентификации повреждений в стержнях, балках и более сложных, связанных структурах посвящено большое количество работ М.А. Ильгамов [1], А.О. Ватульян, Н.О. Солуянов [2, 3], G. Biscontin, A. Morassi, P. Wendel [4], M.I. Friswell [5], G. M. L. Gladwell [6], D. Venatar, D. Rittel, A. L. Yarin [7], А.П. Бовсуновский, О.А. Бовсуновский [8], Г.Ф. Сафина [9], В.А. Акопьяна, А.В. Черпаков, Е.В. Рожков, А.Н. Соловьева [10] и многих других исследователей. Достаточно подробный анализ этих работ изложен в недавних обзорах [3, 6, 10]. В [3] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. В [10] представлен интегральный признак идентификации дефектов в элементах стержневых конструкций, позволяющий определять не только их наличие и местоположение, но и степень поврежденности. В [11] выполнено количественное исследование отражения от дефектов в трубах в частотном диапазоне 10-300 кГц. Результаты показывают, что коэффициент отражения от осесимметричных трещин увеличивается монотонно с глубиной во всех частотах и увеличениях с частотой на любой данной глубине. В предыдущих работах автора рассмотрены собственные изгибные и продольные колебания стержня конечной длины с поперечным надрезом, крутильные колебания вала с продольным сквозным разрезом, например, в [12]. В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано

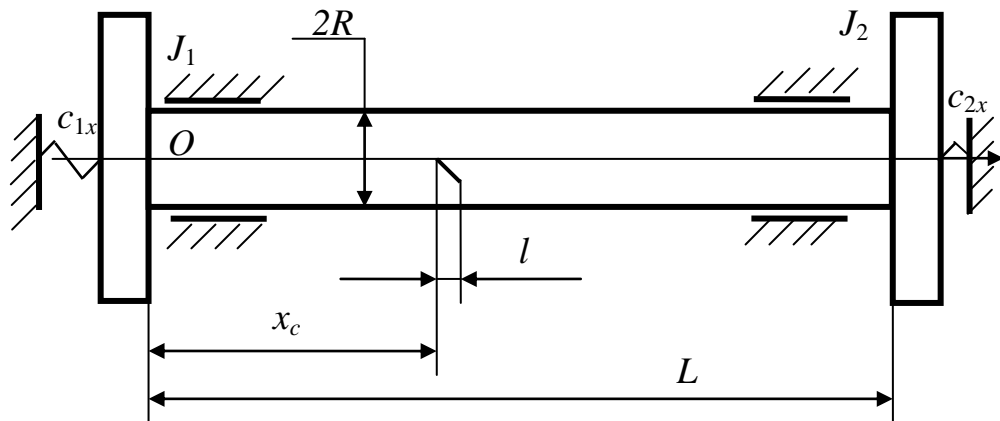
изменение спектра собственных частот продольных колебаний вертикальной штанги [13]. Продольный разрез или трещина в стержне не определяется по собственным частотам продольных или изгибных колебаний, так как в зоне разреза не происходит уменьшение площади и осевых моментов инерции поперечного сечения стержня. Поэтому здесь рассматриваются собственные крутильные колебания бурильной колонны с повреждением в виде продольного сквозного радиального разреза и с дефектом в виде надреза. Разрез моделирует ее повреждение типа продольной сквозной радиальной трещины.

### **Постановка задачи**

Бурильная колонна закреплена верхним и нижним концами на упругих опорах с жесткостью на кручение  $c_1$  и  $c_2$  и соединена по концам с дисками с моментами инерции  $J_1$  и  $J_2$  (рисунок 1). Рассматривается только напряженно-деформированное состояние в пределах упругости для бурильной колонны. Поскольку трещина появляется в результате развития незначительного зародыша, причем необязательно в наиболее напряженном сечении, то предполагается, что разрез может быть в любом месте по длине бурильной колонны. Задача состоит в определении начальной координаты разреза и его длины. А в случае с дефектом в виде надреза требуется определить координату, длину и параметр надреза.



а



б

Рисунок 1. Расчетная схема: а) дефект в виде разреза, б) дефект в виде надреза

Обозначим через  $L, J_p, J_k$  длину, полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения неповрежденной части стержня,  $G, \rho$  – модуль сдвига и плотность, через  $l$  – длину повреждения,  $j_p, j_k$  – полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения [14],  $x_c$  – его начальную координату,  $\varphi, M$  – угол поворота и крутящий момент в сечении буровой колонны. Между крутящим моментом  $M$  и относительным углом закручивания  $\theta$  принимается следующая зависимость:

$$M = GJ_k \theta, \quad \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

В соответствии со сказанным имеем:

$$GJ_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad M = GJ_k \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (1)$$

Отсчитывая координату  $x$  от точки крепления, запишем граничные условия:

$$M = c_1 \varphi + J_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (x=0), \quad M = -c_2 \varphi - J_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (x=L). \quad (2)$$

В пределах разреза с короткой длиной  $l$  и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние, но принимаем гипотезу плоских сечений. Обозначая функции в областях  $0 \leq x \leq x_c$ ,  $x_c \leq x \leq x_c + l$ ,  $x_c + l \leq x \leq L$  индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при  $x = x_c$  и  $x = x_c + l$  (условия равенства крутящих моментов и углов поворота), причем, для бурильной колонны с круглым сечением [14]: для дефекта в виде надреза:

$$J_k = J_p = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}, \quad j_p \leq J_p, \quad m = \frac{j_k}{J_k}, \quad m_p = j_p / J_p$$

для дефекта в виде разреза:

$$J_k = J_p = \frac{\pi R^4}{2} \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right), \quad j_k = \frac{\pi}{3} (R-r)^3 (R+r), \quad j_p = J_p,$$

$$m = \frac{j_k}{J_k} = \frac{2(R-r)^2}{3(R^2 + r^2)}, \quad m_p = 1,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = m \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad (x = x_c), \quad (3)$$

$$m \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \varphi_3, \quad (x = x_c + l). \quad (4)$$

Шесть констант в этом решении, записанном для областей  $0 \leq x \leq x_c$ ,  $x_c \leq x \leq x_{cl}$  и  $x_{cl} \leq x \leq L$ , ( $x_{cl} = x_c + l$ ) определяются из шести граничных условий (2)-(4). Для того, чтобы  $A_i, B_i$  ( $i = 1 \div 3$ ) не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы определитель равнялся нулю, где его ненулевые элементы записываются в виде:

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{1x} - J_1 \omega_t^2, a_{12} = -GJ_k \alpha_1, a_{25} = (-c_{2x} + J_2 \omega_t^2) \cos(\alpha_3 L) + GJ_k \alpha_3 \sin(\alpha_3 L), \\ a_{26} &= (-c_{2x} + J_2 \omega_t^2) \sin(\alpha_3 L) - GJ_k \alpha_3 \cos(\alpha_3 L), \\ a_{31} &= \sin(\alpha_1 x_c), a_{32} = -\cos(\alpha_1 x_c), a_{33} = -\sqrt{m_p m_k} \sin(\alpha_2 x_c), \\ a_{34} &= \sqrt{m_p m_k} \cos(\alpha_2 x_c), \\ a_{41} &= \cos(\alpha_1 x_c), a_{42} = \sin(\alpha_1 x_c), a_{43} = -\cos(\alpha_2 x_c), a_{44} = -\sin(\alpha_2 x_c), \\ a_{53} &= \alpha_1 \sqrt{m_p m_k} \sin(\alpha_2 x_{cl}), a_{54} = -\alpha_1 \sqrt{m_p m_k} \cos(\alpha_2 x_{cl}), a_{55} = -\alpha_3 \sin(\alpha_3 x_{cl}), \\ a_{56} &= \alpha_3 \cos(\alpha_3 x_{cl}), a_{63} = \cos(\alpha_2 x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha_2 x_{cl}), \\ a_{65} &= -\cos(\alpha_3 x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha_3 x_{cl}). \end{aligned}$$

Частотное уравнение здесь не приводится из-за его громоздкости. Если частное решение представить в амплитудной форме  $\varphi = C_i \sin(\alpha_i x + \delta_i) \sin \omega_t t$ , то частотное уравнение после исключения шести констант  $C_i, \delta_i$  ( $i = 1 \div 3$ ) записывается:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left\{ \alpha_2 x_{cl} + \operatorname{arctg} \left[ m \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left( \alpha_1 x_c + \operatorname{arctg} \frac{GJ_k \alpha_1}{c_{1x} - J_1 \omega_t^2} \right) \right] - \alpha_2 x_c \right\} = \\ & = m \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left( \alpha_3 x_{cl} + \operatorname{arctg} \frac{GJ_k \alpha_3}{-c_{2x} + J_2 \omega_t^2} - \alpha_3 L \right), \\ & \alpha_1 = \alpha_3 = \omega_t / a_1 = \omega_t \sqrt{\rho J_p / GJ_k}, \alpha_2 = \alpha_1 \sqrt{m_p / m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Когда коэффициенты жесткости  $c_1$  и  $c_2 \rightarrow \infty$  или равны нулю вместе с моментами инерции  $J_1$  и  $J_2$ , тогда частотное уравнение упрощается.

## 1 Дефект в виде разреза

Таким образом, в приведенной простейшей модели разреза фигурируют его начальная координата  $x_c$  и длина  $l$ . В прямой задаче начальная координата разреза  $x_c$  и его длина известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины. Для определения  $x_c$ ,  $l$  необходимо провести анализ собственных частот крутильных колебаний вала с разрезом.

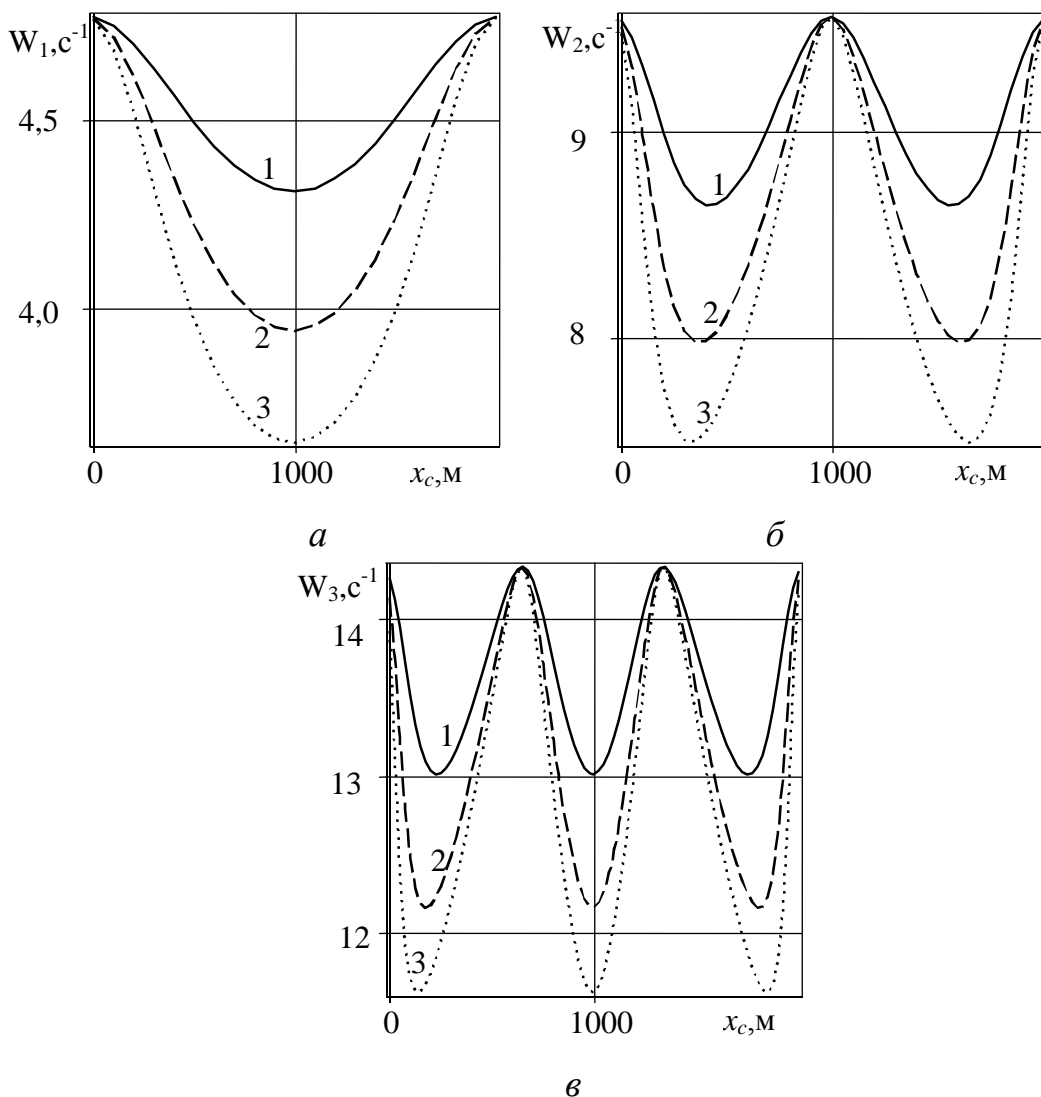


Рисунок 2. Зависимости круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$  (фрагмент *a*),  $\omega_2$  (фрагмент *б*),  $\omega_3$  (фрагмент *в*) от координаты разреза  $x_c$  для различных  $l$  (кривая 1-1; 2-2; 3-3 м)

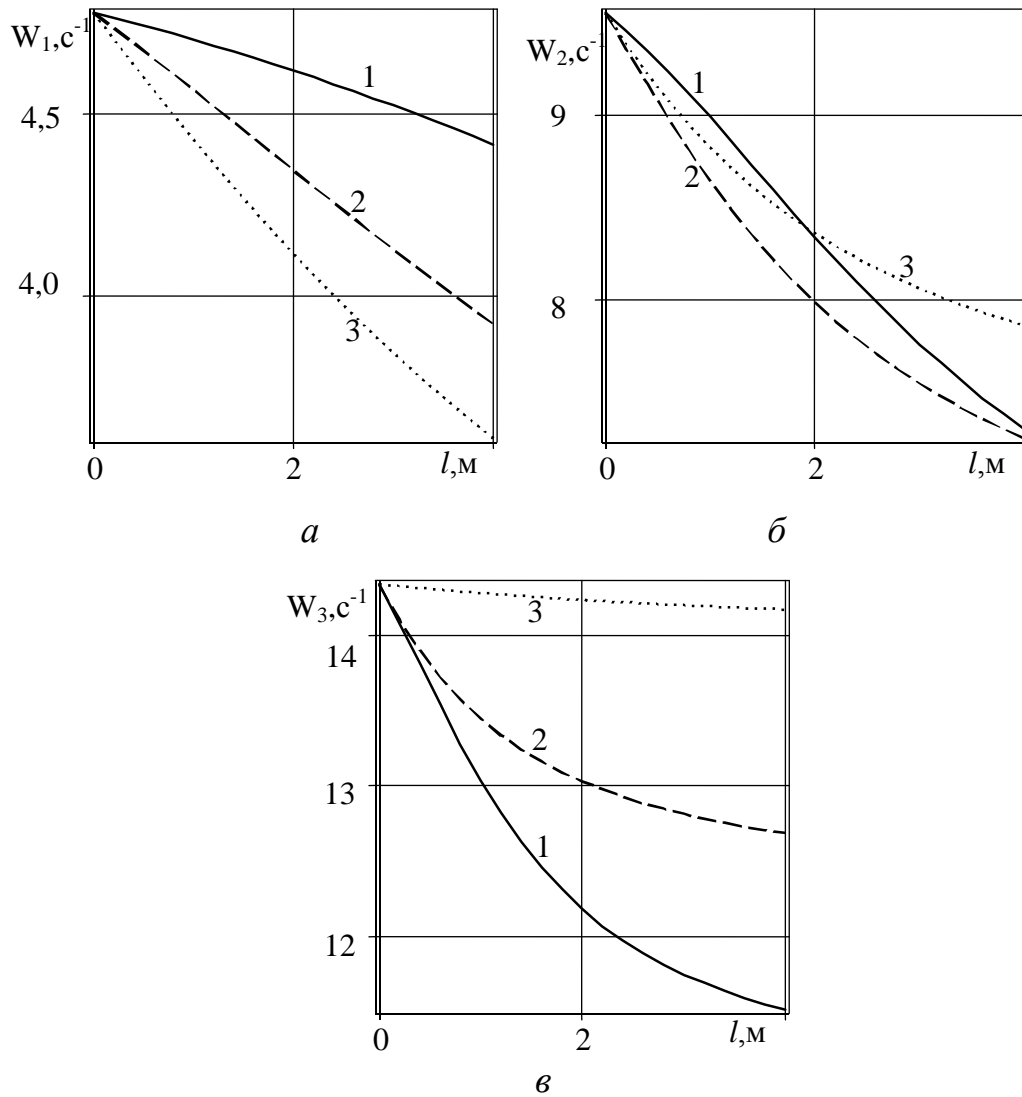


Рисунок 3. Зависимости круговых частот крутильных колебаний буровой колонны  $\omega_1$  (фрагмент а),  $\omega_2$  (фрагмент б),  $\omega_3$  (фрагмент в) от длины разреза  $l$  для различных значений координаты разреза  $x_c$  (кривая 1-200; 2-400; 3-600 м)

### Прямая задача

Решение уравнения (5) проведено для следующих параметров системы:  $G=0,77 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho=7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $a = 3141,9$  м/с,  $L=2000$  м,  $R=84,137$  мм,  $r=74,95$  мм,  $m=0,004431705391$ ,  $c_1=c_2=0$ ,  $J_1=10$  кгм<sup>2</sup>,  $J_2=5$  кгм<sup>2</sup>. При этом первая, вторая и третья собственные частоты буровой колонны без разреза  $\omega_1 = 4,777912896$  1/с,  $\omega_2 = 9,556837670$  1/с,  $\omega_3 = 14,33773996$  1/с. Для буровой колонны с разрезом при  $x_c=200$  м,  $l = 1$  м решение прямой задачи дает, что круговые частоты крутильных колебаний буровой

колонны  $\omega_1 = 4,704178234$  1/с,  $\omega_2 = 8,991891796$  1/с,  $\omega_3 = 13,03492495$  1/с. Видно, что продольный сквозной радиальный разрез длиной 1 м приводит к существенному уменьшению первых трех частот свободных крутильных колебаний бурильной колонны. На рисунке 2 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$  (фрагмент *a*),  $\omega_2$  (фрагмент *б*),  $\omega_3$  (фрагмент *в*) от координаты разреза  $x_c$  для различных  $l$  (кривая 1-1; 2-2; 3-3 м). Эти зависимости имеют периодический характер. Также отметим, что при расположении разреза в узле колебаний собственные частоты не зависят от длины разреза. На рисунке 3 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$  (фрагмент *a*),  $\omega_2$  (фрагмент *б*),  $\omega_3$  (фрагмент *в*) от длины разреза  $l$  для различных значений координаты разреза  $x_c$  (кривая 1-200; 2-400; 3-600 м). Из рисунков видно, что с возрастанием длины разреза три низшие частоты собственных крутильных колебаний уменьшаются. Получено, что изменения собственных частот крутильных колебаний бурильной колонны с продольным сквозным разрезом значительны по сравнению с изменениями собственных частот крутильных колебаний для бурильной колонны с поперечным надрезом.



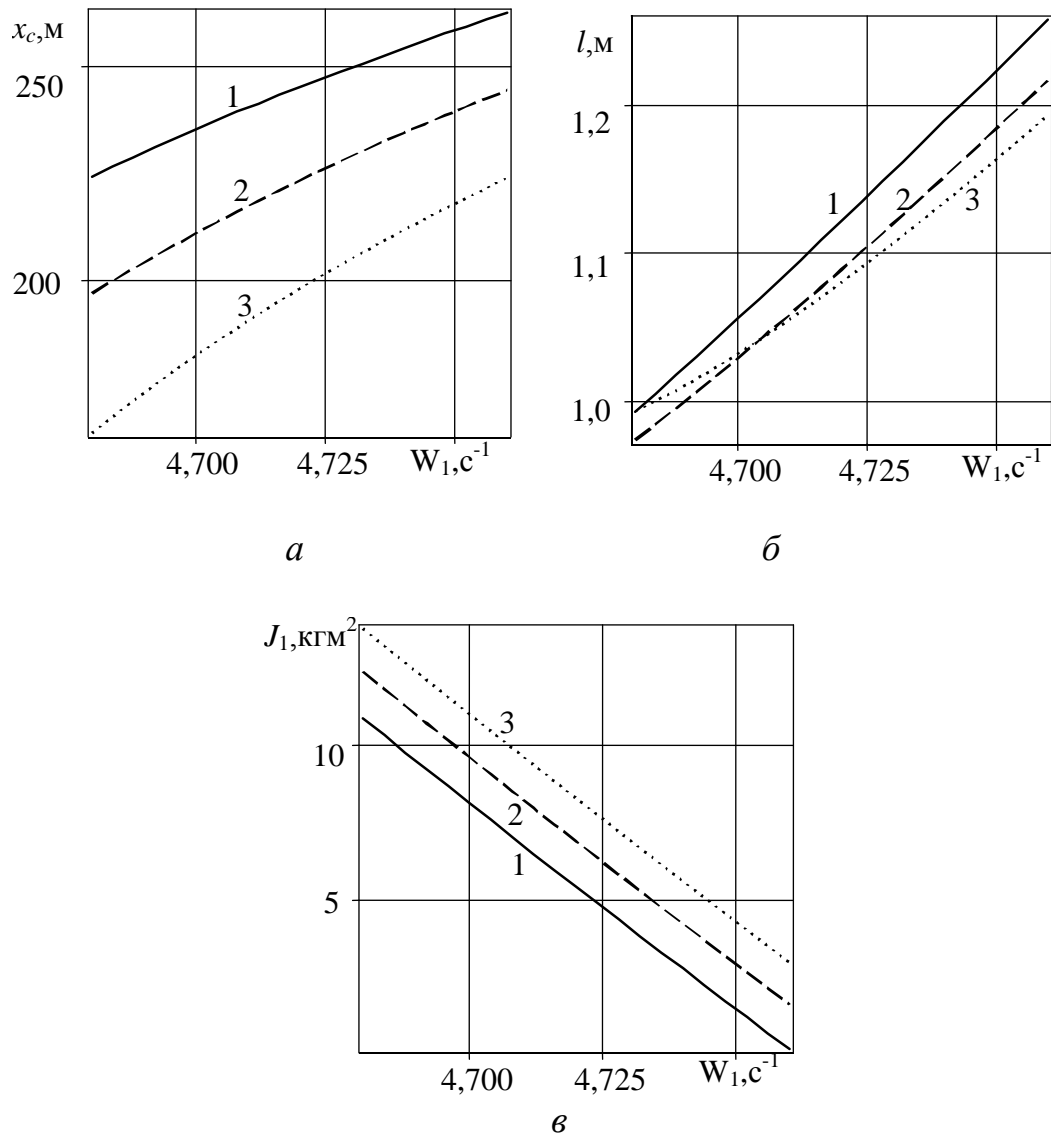


Рисунок 4. Зависимости координаты разреза  $x_c$  (фрагмент *а*), его длины  $l$  (фрагмент *б*) и момента инерции  $J_1$  (фрагмент *в*) от круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$ , для  $\omega_3 = 13$  1/с,  $\omega_2 = 8,90$  1/с (кривая 1),  $\omega_2 = 8,95$  1/с (кривая 2),  $\omega_2 = 9,00$  1/с (кривая 3)

### Обратная задача

Если частотное уравнение записать для трех частот свободных крутильных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата разреза  $x_c$ , его длина  $l$  и момент инерции  $J_1$ . Например, для круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1 = 4,7$  1/с,  $\omega_2 = 8,9$  1/с,  $\omega_3 = 13$  1/с решение обратной задачи дает, что бурильная колонна имеет разрез при  $x_c = 235,2197640$  м,  $l = 1,056191668$  м,  $J_1 = 8,130607888$  кгм<sup>2</sup>.

На рисунке 4 приводятся зависимости координаты разреза  $x_c$  (фрагмент *a*), его длины  $l$  (фрагмент *б*) и момента инерции  $J_1$  (фрагмент *в*) от круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$ , для  $\omega_3 = 13$  1/с,  $\omega_2 = 8,90$  1/с (кривая 1),  $\omega_2 = 8,95$  1/с (кривая 2),  $\omega_2 = 9,00$  1/с (кривая 3).

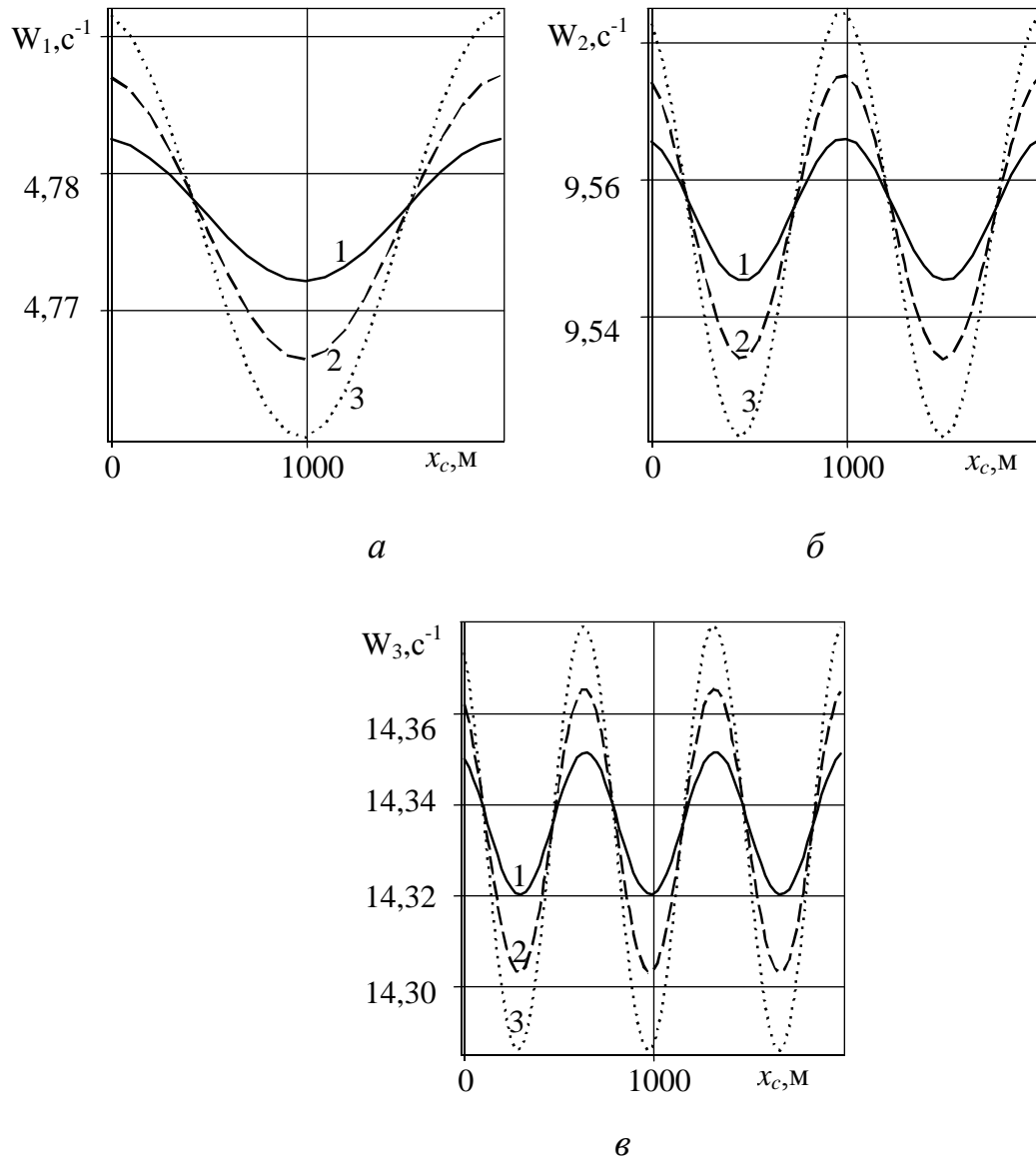


Рисунок 5. Зависимости круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$  (фрагмент *a*),  $\omega_2$  (фрагмент *б*),  $\omega_3$  (фрагмент *в*) от координаты надреза  $x_c$  для различных  $l$  (кривая 1-10; 2-20; 3-30 м) при  $m_p = m_k = 0,8$

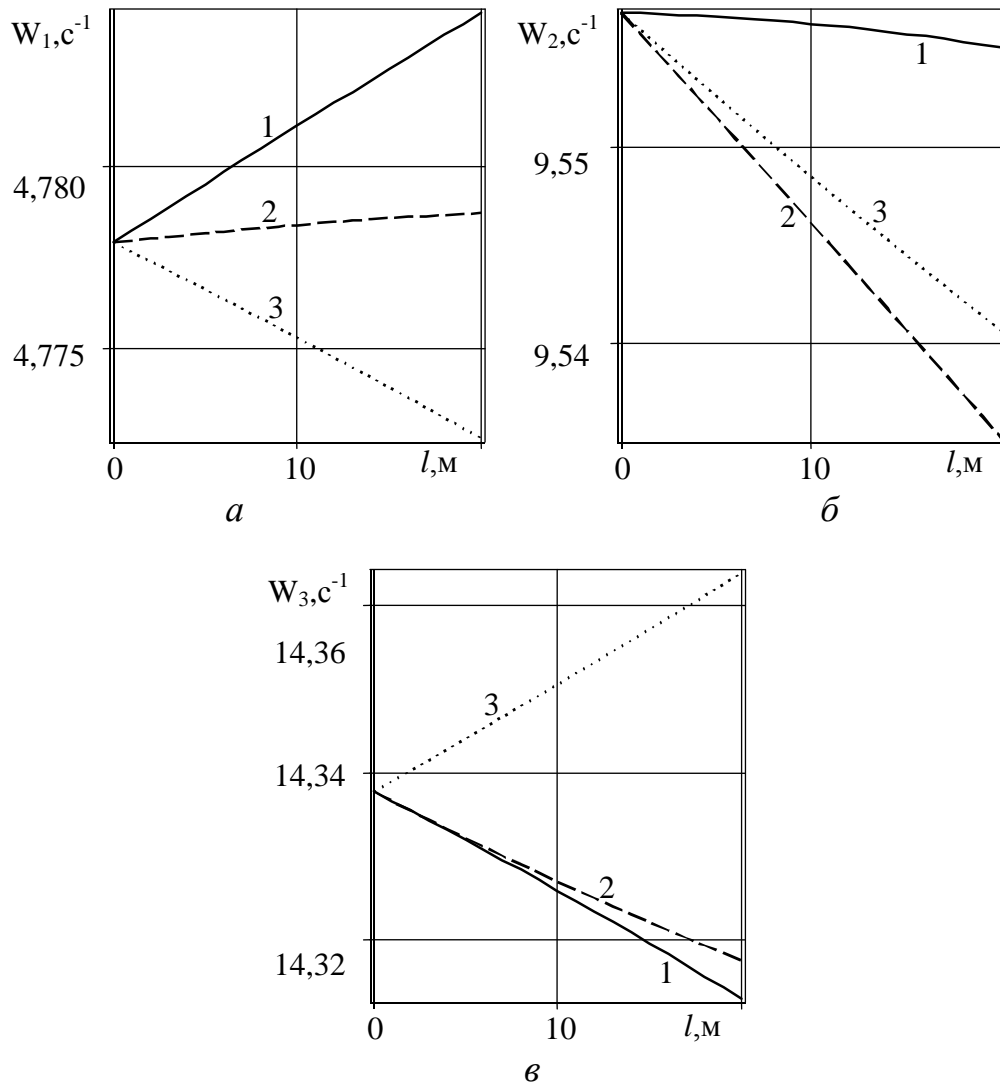


Рисунок 6. Зависимости круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$  (фрагмент а),  $\omega_2$  (фрагмент б),  $\omega_3$  (фрагмент в) от длины надреза  $l$  для различных значений координаты надреза  $x_c$  (кривая 1–200; 2–400; 3–600 м) при  $m_p = m_k = 0,8$

## 2 Дефект в виде надреза

В вышеприведенной простейшей модели повреждения фигурируют его начальная координата  $x_c$ , длина  $l$  и параметры  $m_k$  и  $m_p$ . В прямой задаче начальная координата повреждения  $x_c$ , длина  $l$  и параметры  $m_k$  и  $m_p$  известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины. Для определения  $x_c$ ,  $l$ ,  $m_k$  и  $m_p$  необходимо провести анализ собственных частот крутильных колебаний вала с повреждением. Для осесимметричного повреждения (надреза)  $m_k = m_p$ .

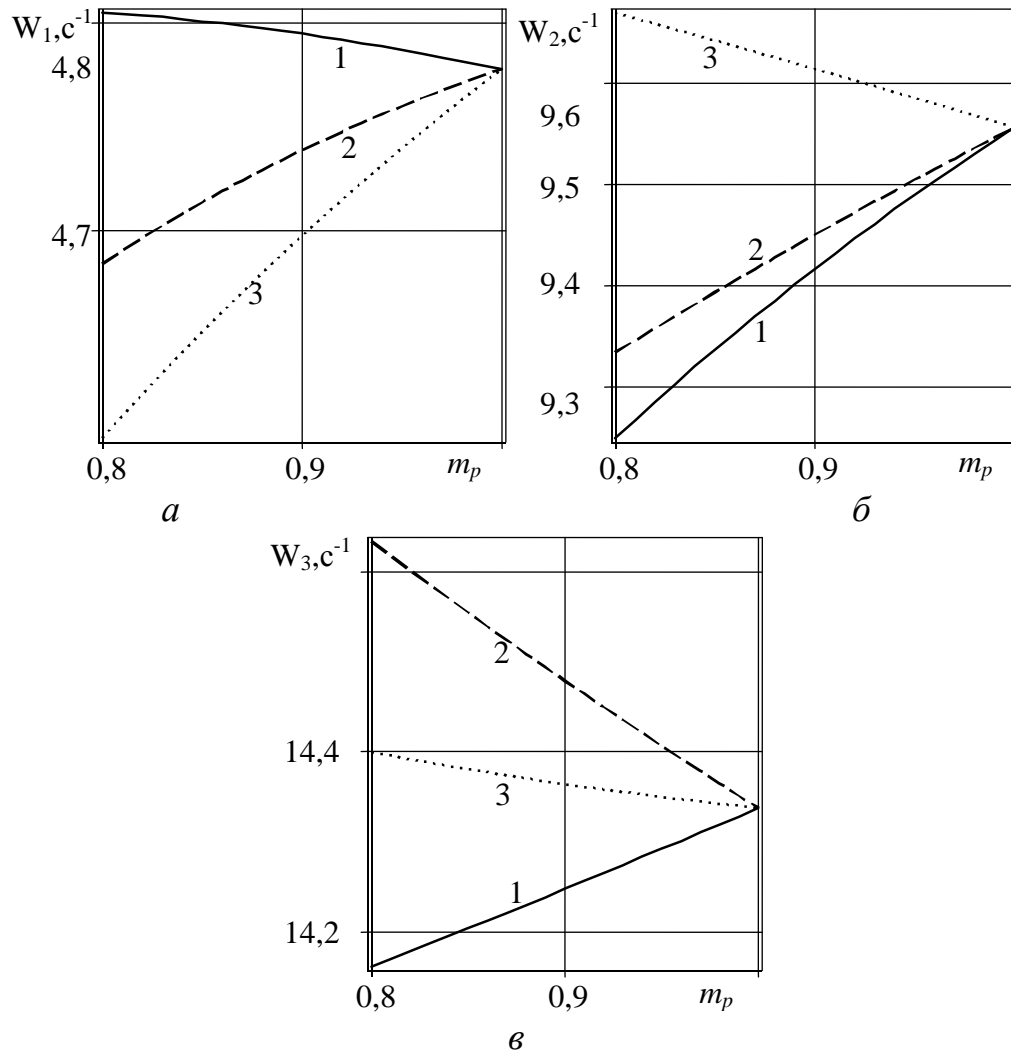


Рисунок 7. Зависимости круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$  (фрагмент *a*),  $\omega_2$  (фрагмент *б*),  $\omega_3$  (фрагмент *в*) от параметра  $m_p$  ( $m_p = m_k$ ) для различных значений координаты надреза  $x_c$  (кривая 1-200; 2-400; 3-600 м) при длине надреза  $l = 10$  м

### Прямая задача

Решение уравнения (5) проведено численно для следующих параметров системы:  $G=0,77 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho=7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $a = 3141,9$  м/с,  $L=2000$  м,  $R=84,137$  мм,  $r=74,95$  мм,  $c_1=c_2=0$ ,  $J_1=10$  кгм<sup>2</sup>,  $J_2=5$  кгм<sup>2</sup>. На рисунке 5 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$  (фрагмент *a*),  $\omega_2$  (фрагмент *б*),  $\omega_3$  (фрагмент *в*) от координаты надреза  $x_c$  для различных  $l$  (кривая 1-10; 2-20; 3-30 м) при  $m_p = m_k = 0,8$ . Эти зависимости имеют периодический характер. Также отметим, что при расположении надреза в узле колебаний собственные

частоты не зависят от длины надреза. На рисунке 6 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$  (фрагмент *a*),  $\omega_2$  (фрагмент *б*),  $\omega_3$  (фрагмент *в*) от длины надреза  $l$  для различных значений координаты надреза  $x_c$  (кривая 1-200; 2-400; 3-600 м) при  $m_p = m_k = 0,8$ . На рисунке 7 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$  (фрагмент *a*),  $\omega_2$  (фрагмент *б*),  $\omega_3$  (фрагмент *в*) от параметра  $m_p$  ( $m_p = m_k$  для различных значений координаты надреза  $x_c$  (кривая 1-200; 2-400; 3-600 м) при длине надреза  $l = 10$  м.

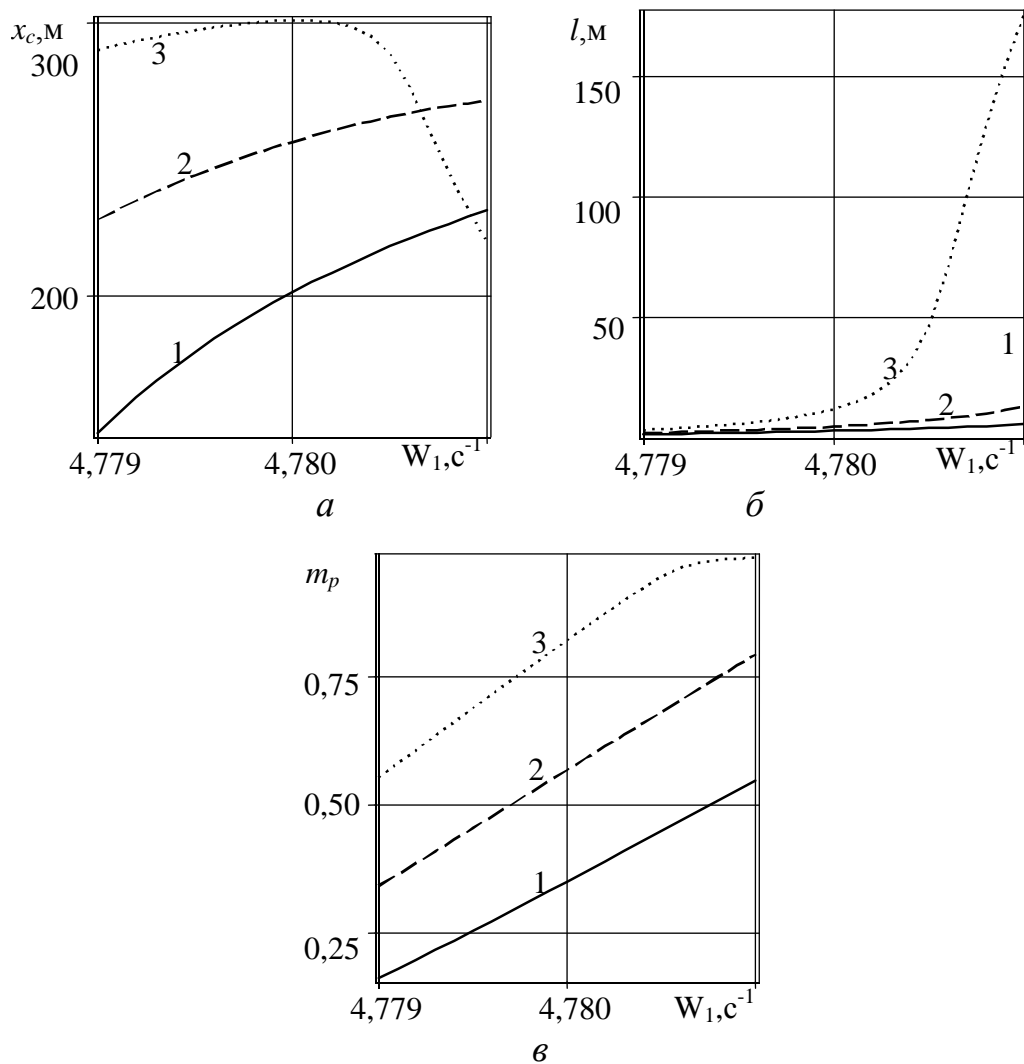


Рисунок 8. Зависимости координаты надреза  $x_c$  (фрагмент *a*), его длины  $l$  (фрагмент *б*) и параметра  $m_p$  (фрагмент *в*) от круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$ , для  $\omega_2 = 9,55$  1/с,  $\omega_3 = 14,310$  1/с (кривая 1),  $\omega_3 = 14,315$  1/с (кривая 2),  $\omega_3 = 14,320$  1/с (кривая 3)

## Обратная задача

Если частотное уравнение записать для трех частот свободных крутильных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата надреза  $x_c$ , его длина  $l$  и параметр  $m_k=m_p$ . Например, для круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1=4,779 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2=9,55 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_3=14,31 \text{ с}^{-1}$  решение обратной задачи дает, что бурильная колонна имеет координату надреза  $x_c=248,778 \text{ м}$ , его длину  $l=12,593 \text{ м}$  и параметр  $m_k=m_p=0,745$ .

На рисунке 8 приводятся зависимости координаты надреза  $x_c$  (фрагмент *a*), его длины  $l$  (фрагмент *b*) и параметра  $m_p$  (фрагмент *в*) от круговых частот крутильных колебаний бурильной колонны  $\omega_1$ , для  $\omega_2 = 9,55 \text{ 1/с}$   $\omega_3 = 14,310 \text{ 1/с}$  (кривая 1),  $\omega_3 = 14,315 \text{ 1/с}$  (кривая 2),  $\omega_3 = 14,320 \text{ 1/с}$  (кривая 3).

## Выводы

Зависимости собственных частот крутильных колебаний от координаты разреза или надреза имеют периодический характер. Получено, что при расположении повреждения в узле колебаний собственные частоты продольных колебаний не зависят от его длины. Получено, что при расположении разреза или надреза в узле колебаний собственные частоты не зависят от длины разреза и надреза. С возрастанием длины разреза или надреза низшие частоты собственных крутильных колебаний уменьшаются.

По двум частотам свободных крутильных колебаний можно определить начальную координату и длину продольного сквозного радиального разреза бурильной колонны. По трем собственным частотам крутильных колебаний определяются координата, длина и параметр надреза. Проведенные исследования показывают, что изменения собственных частот крутильных колебаний бурильной колонны с продольным сквозным

разрезом *значительны* по сравнению с изменениями собственных частот крутильных колебаний для бурильной колонны с поперечным надрезом.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 14-01-97010-р\_поволжье\_a, 14-01-97013-р\_поволжье\_a, 14-01-00740\_a).

## References

1 Ilgamov M.A. Diagnostika povrezhdeniya vertikalnoy shtangi. Trudy institute mehaniki UNTs RAN. Vyip. 5. – Ufa: Gilem, 2007, p. 201–211. [in Russian].

2 Vatulyan A.O., Soluyanov N.O. Ob opredelenii mestopolozheniya i razmera polosti v uprugom sterzhne // Defektoskopiya. 2005. No. 9. P. 44–56. [in Russian].

3 Vatulyan A.O. Obratnye zadachi v mehanike deformiruемого tverdogo tela. Moscow: Fizmatlit, 2007. 224 p. [in Russian].

4 Biscontin G., Morassi A., Wendel P. Asymptotic separation of spectrum in notched rods. J. Vibr. and Control. 1998. V. 4. No. 3. P. 237–251. [in English].

5 Friswell M.I. Damage identification using inverse methods // Phil. Trans. R. Soc. A. 2007. P. 365, 393–410. [in English].

6 Gladwell G.M.L. Inverse problems in vibration. Dordrecht, etc: Kluwer, 2004. = Gladwell G.M.L. Obratnye zadachi teorii kolebaniy. Moscow, Izhevsk: NITs Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika, 2008. 608 p. [in Russian].

7 Benatar D., Rittel D., Yarin A. L. Theoretical and experimental analysis of longitudinal wave propagation in cylindrical viscoelastic rods // J. Mech. and Phys. Solids. 2003. V. 51. No. 8. P. 1413–1431. [in English].

8 Bovsunovskiy A.P., Bovsunovskiy O.A. Ispolzovanie nelineynykh rezonansov dlya diagnostiki zakryvayushchihsya treshchin v sterzhnevyykh elementah // Problemy prochnosti. 2010. No. 3. P. 125–141. [in Russian].

9 Safina G.F. Issledovanie po krutilnyim kolebaniyam vala s diskami // Defektoskopiya. 2011. Vol. 47. No. 3. P. 51–65. [in Russian].

10 Akopyan V.A., Cherpakov A.V., Rozhkov E.V., Solovyev A.N. Integralnyiy diagnosticheskiy priznak identifikatsii povrezhdeniy v elementah sterzhnevyykh konstruktsiy // Kontrol. Diagnostika. 2012. No. 7. P. 50–56. [in Russian].

11 Demma A., Cawley P., Lowe M. The reflection of the fundamental torsional mode from cracks and notches in pipes, J. Acoust. Soc. Am. 2013. Vol. 114. No. 2. P. 61–625. [in English].

12 Hakimov A.G. O sobstvennykh kolebaniyakh pologo vala s prodolnyim skvoznym razrezom // Defektoskopiya. 2013. Vol. 49. No. 6. P. 32-37. [in Russian].

13 Hakimov A.G. Diagnostika povrezhdeniy vertikalnoy shtangi na uprugoy podveske // Elektronnyiy nauchnyiy zhurnal Neftegazovoe delo. 2010. Available at: [http://www.ogbus.ru/authors/Khakimov/Khakimov\\_1.pdf](http://www.ogbus.ru/authors/Khakimov/Khakimov_1.pdf) (accessed: 06.09.2010). [in Russian].

14 Feodosyev V.I. Soprotivlenie materialov. Moscow: Nauka. 1986. 512 p. [in Russian].

### **Список используемых источников**

1 Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги. Труды института механики УНЦ РАН. Вып. 5. Уфа: «Гилем», 2007, С. 201-211.

2 Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. №9. С. 44-56.

3 Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.

4 Biscontin G., Morassi A., Wendel P. Asymptotic separation of spectrum in notched rods. J. Vibr. and Control. 1998. V. 4. No. 3. P. 237-251.

5 Friswell M.I. Damage identification using inverse methods // Phil. Trans. R. Soc. A. 2007. P. 365. 393 - 410.



6 Gladwell G. M. L. Inverse Problems in Vibration. Dordrecht, etc: Kluwer, 2004. = Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 608 с.

7 Benatar D., Rittel D., Yarin A. L. Theoretical and experimental analysis of longitudinal wave propagation in cylindrical viscoelastic rods // J. Mech. and Phys. Solids. 2003. V. 51. No. 8. P. 1413-1431.

8 Бовсуновский А.П., Бовсуновский О.А. Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах // Проблемы прочности. 2010. № 3. С. 125-141.

9 Сафина Г.Ф. Исследование по крутильным колебаниям вала с дисками // Дефектоскопия. 2011. Т. 47. № 3. С. 51-65.

10 Интегральный диагностический признак идентификации повреждений в элементах стержневых конструкций/ Акопьян В.А. [и др.] // Контроль. Диагностика. 2012. № 7. С. 50-56.

11 Demma A., Cawley P., Lowe M. The reflection of the fundamental torsional mode from cracks and notches in pipes, J. Acoust. Soc. Am. 114 (2) (2003) 611– 625.

12 Хакимов А.Г. О собственных колебаниях полого вала с продольным сквозным радиальным разрезом // Дефектоскопия. 2013. Т. 49. № 6. С. 32-37.

13 Хакимов А.Г. Диагностика повреждений вертикальной штанги на упругой подвеске // Нефтегазовое дело: электрон. науч. журн. 2010. URL: [http://www.ogbus.ru/authors/Khakimov/Khakimov\\_1.pdf](http://www.ogbus.ru/authors/Khakimov/Khakimov_1.pdf) (дата обращения: 06.09.2010).

14 Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. М.: Наука. 1986. 512 с.

**About the authors****Сведения об авторах**

A. G. Khakimov, Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Federal State Budget Scientific Institution, R.R. Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, the Russian Federation

Хакимов А.Г., канд. физ.-мат. наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук (Имех УНЦ РАН), г. Уфа, Российская Федерация

e-mail: [hakimov@anrb.ru](mailto:hakimov@anrb.ru)

E.I. Satyev, Researcher, Federal State Budget Scientific Institution, R.R. Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, the Russian Federation

Сатыев Э.И., инженер – исследователь, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук (Имех УНЦ РАН), г. Уфа, Российская Федерация