УДК 681.2; 621.3.082.1

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИННОГО РЕЗОНАТОРА В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЯЗКОСТИ И ПЛОТНОСТИ СКВАЖИННОГО ФЛЮИДА

RESEARCH OF VIBRATIONS OF A PLATE RESONATOR IN VARIOUS MODES FOR DETERMINING THE VISCOSITY AND DENSITY OF WELL FLUID

В. В. Котов, Н. А. Ишинбаев

Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, Российская Федерация

Viktor V. Kotov, Nikolay A. Ishinbaev

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation

e-mail: kotwi@rambler.ru

Аннотация. В настоящее время для измерения параметров технологических и товарных жидкостей в нефтяной и газовой промышленности применяются приборы, требования к измерению плотности и вязкости которых возрастают с каждым днем. В статье исследуются частотные свойства пластинного резонатора в жидкости (воздухе) с определённой плотностью и вязкостью, причем для исследования свободных и вынужденных колебаний используется математическая модель, предложенная авторами в отдельной ранее опубликованной статье. Для выполнения исследований применен аппарат теории автоматического управления – математическая модель колебаний пластины преобразована в передаточную функцию колебательного звена. В результате исследования колебаний пластины в затухающем и вынужденных режимах с помощью аналитических и графических зависимостей (амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики) была проанализирована связь различных частот с резонансной, что в последующем позволит разработать автогенератор, работающий на различных режимах колебаний.

Abstract. At present, devices are used to measure the parameters of process and commercial liquids in the oil and gas industry, the requirements for the density and viscosity measurement of which are increasing every day. The article investigates the frequency properties of a plate resonator in a liquid (air) with a certain density and viscosity, and for the study of free and forced vibrations, a mathematical model proposed by the authors in a separate previously published article is used. To carry out the research, the apparatus of the theory of automatic control was used — the mathematical model of the oscillations of the plate was converted into the transfer function of the oscillatory link. As a result of the study of plate vibrations in decaying and forced modes using analytical and graphical dependences (amplitude-frequency and phase-frequency response), the relationship of various frequencies with the resonance was analyzed, which subsequently will allow the development of an oscillator operating in various vibration modes.

Ключевые слова: амплитудно-частотная характеристика; фазочастотная характеристика; устойчивость; диаграмма Найквиста; затухающие колебания; вынужденные колебания; вибрационный плотномер; вязкость, плотность; вибрационный вискозиметр; пластинный резонатор; колебания пластины; автоколебания

Key words: amplitude-frequency response; phase-frequency response; stability; Nyquist diagram; damped oscillations; forced oscillations; vibrational densitometer; viscosity; density; vibrational viscometer; plate resonator; plate vibrations; self-oscillation

Измерения плотности и вязкости скважинного флюида вибрационными методами в последнее время приобретают все большее распространение. Преимущественное использование данного метода обусловлено высокой точностью, оперативностью получения измерительной информации, возможностью проводить непрерывные измерения в потоке.

Предложенная в [1] математическая модель и проведенное экспериментальное исследование позволяют сделать вывод об адекватности математической модели колебаний пластины в жидкости и воздухе.

Целью данной статьи является исследование колебаний пластинного резонатора в различных режимах для оценки возможности построения автогенератора колебаний плотномера – вискозиметра в режиме свободных и вынужденных колебаний.

Для достижения цели решаются следующие задачи:

- составление передаточной функции для объекта – пластины;
- исследование основных закономерностей колебаний пластинного резонатора в жидкости и воздухе при свободных и вынужденных колебаниях;
- получение выражений для частот колебаний в зависимости от демпфирования для разработки алгоритма функционирования цифрового автогенератора.

В данном контексте исследований было решено использовать аппарат теории автоматического управления, так как это решение обладает рядом преимуществ, основное из которых заключатся в том, что упрощается исследование динамики колебательного движения.

Кроме заявленных преимуществ, использование аппарата теории автоматического управления в дальнейшем позволит применить разработанные методы исследования устойчивости и построении автогенератора, а также разработать методику идентификации объекта – пластинного резонатора.

Для перехода от дифференциального уравнения к описанию с позиции теории автоматического управления и последующего исследования пластинного резонатора в различных режимах колебаний необходимо получить передаточную функцию объекта. Используя модель, полученную в [1], дифференциальное уравнение для пластинного резонатора для вынужденных колебаний можно записать следующим образом

$$(M+m)\ddot{x}+(k_1+k_2\eta)\dot{x}+kx=F, \tag{1}$$

где M – масса пластины;

m – «присоединенная» масса жидкости;

k_1 –коэффициент, определяющий собственное трение системы;

$k_2\eta$ – коэффициент, определяющий вязкое трение, обусловленное окружающей средой;

k – коэффициент (модуль) упругости пластины;

F – вынуждающая сила.

Для составления передаточной функции условимся, что входом (входным воздействием) будет являться вынуждающая сила F, выходным – смещение x (прогиб пластины). Отношение изображения по Лапласу выходной величины для объекта к изображению входной величины, для уравнения (1), полученное при нулевых начальных условиях, запишется следующим образом:

$$W(s)=\frac{1}{(M+m)s^2+(k_1+k_2\eta)s+k}. \tag{2}$$

Для удобства перепишем (2) в стандартном виде:

$$W(s)=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{(M+m)}{k}s^2+\frac{(k_1+k_2\eta)}{k}s+1}. \tag{3}$$

В теории автоматического управления данная передаточная функция соответствует устойчивому колебательному звену, общепринятой для которого является запись:

$$W(s) = \frac{K}{T_0^2 s^2 + T_1 s + 1}, \tag{4}$$

где $T_0^2 = \frac{(M+m)}{k}$; $T_1 = \frac{(k_1+k_2\eta)}{k}$; $K = \frac{1}{k}$.

В [2] приводится анализ коэффициентов, входящих в передаточную функцию (4). T_0 называют постоянной времени, резонансные частоты колебаний определяются по следующим выражениям:

$$\omega_0 = \frac{1}{T_0} = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{(M+m)}}; \tag{5}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0'} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{(M+m)}}. \tag{6}$$

Исходя из анализа дифференциального уравнения предложенной математической модели, а также информации по теории автоматического управления, частоты ω_0 и f_0 определяются как частоты колебаний без демпфирования (без затухания) или резонансные, так как наличие любого демпфирования снижает частоту колебаний. Данная частота в предложенной математической модели, помимо внутренних характеристик пластины, зависит только от массы присоединенной жидкости и не зависит от вязкости. В реальности, колебания пластины с течением времени затухают, что говорит о наличии демпфирования, как собственного, так и внешнего (обусловленного окружающей средой).

С целью учета демпфирования в уравнение для передаточной функции вводят различные коэффициенты. В теории автоматического управления вводят коэффициент ξ – относительный коэффициент затухания (параметр затухания, степень затухания). Иногда степенью затухания называют удвоенное значение относительного коэффициента затухания [3]. С учетом вышесказанного передаточная функция будет выглядеть следующим образом:

$$W(s) = \frac{K}{T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1}, \tag{7}$$

где $2\xi T_0 = \frac{(k_1 + k_2\eta)}{k}$.

В теории колебаний в выражениях может применяться коэффициент затухания, определяемый как

$$\delta = \frac{\xi}{T_0} = \xi\omega_0 = \xi 2\pi f = \frac{\xi 2\pi}{T_0'}.$$

Так как идентификацию параметров колебательного звена предлагается производить по осциллограмме, необходимо рассмотреть соответствующие зависимости. Если параметры звена таковы, что имеет место неравенство $\xi \ < 1$, то корни характеристического уравнения функции (7) являются комплексными, ответ звена на функцию Хевисайда носит колебательный характер. В противном случае функцию (7) можно представить двумя апериодическими звеньями.

Согласно [4], импульсная и переходная характеристики колебательного звена запишутся в следующем виде:

$$k(t) = \frac{K}{2T_0\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T_0}t} sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0} t; \tag{8}$$

$$h(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T_0}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0} t + arctg\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]. \tag{9}$$

Оба выражения описывают затухающий колебательный процесс с относительным коэффициентом затухания ξ, происходящий с демпфированной угловой частотой (частотой затухающих колебаний) $\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0} = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. Следует заметить, что демпфированная частота ω тем сильнее отличается в меньшую сторону от резонансной ω_0, чем больше ξ. При $t \to \infty$ импульсная характеристика $k(\infty) \to 0$, в то время как переходная характеристика $h(\infty) \to K$.

Выражения для амплитудно-частотных, фазочастотных и амплитудно-фазочастоных характеристик колебательного звена имеют вид:

$$H(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T_0^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}}\ ; \qquad (10)$$

$$\theta(\omega) = -arctg\frac{2\xi T_0\ \omega}{1 - T_0^2\omega^2}\ ; \qquad (11)$$

$$U(\omega) = \frac{1 - T_0^2\omega^2}{(1 - T_0^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}\ ; \qquad (12)$$

$$V(\omega) = \frac{2\xi T_0\ \omega}{(1 - T_0^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}\ . \qquad (13)$$

Соответствующие характеристики для произвольной модели при различных значениях ξ приведены на рисунках 1 и 2.

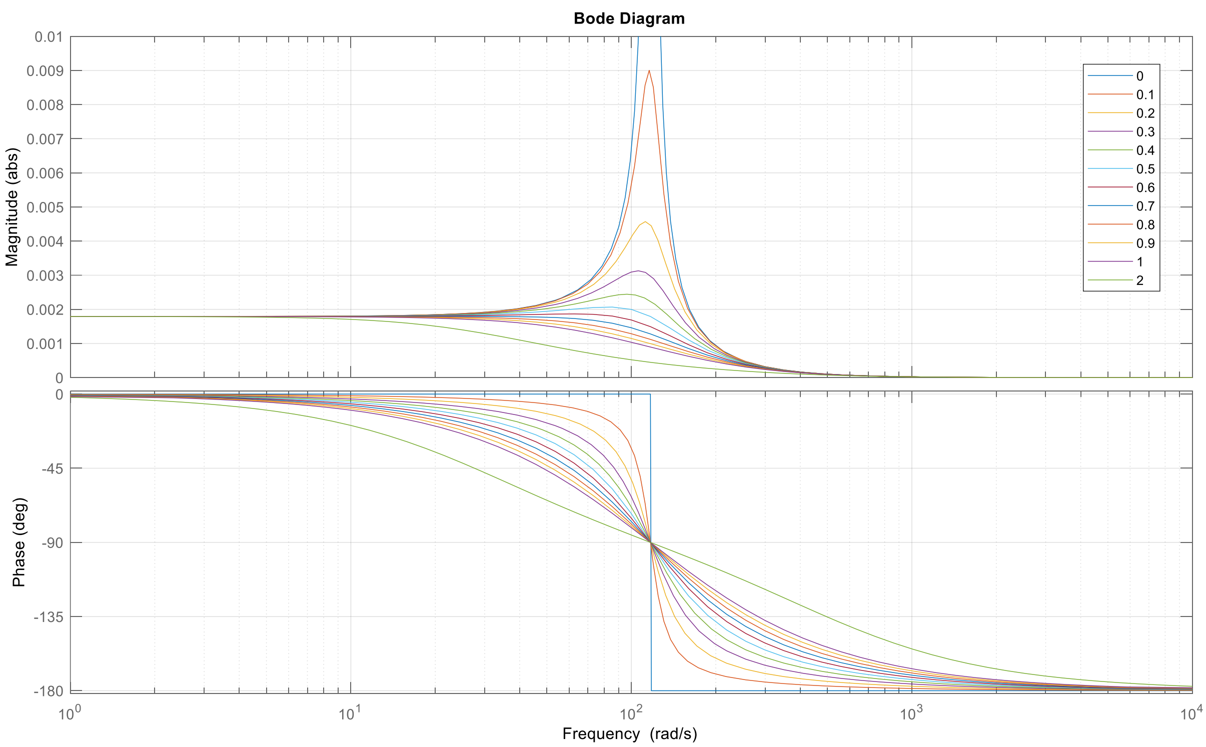

Рисунок 1. АЧХ и ФЧХ для конкретного колебательного звена при различных ξ

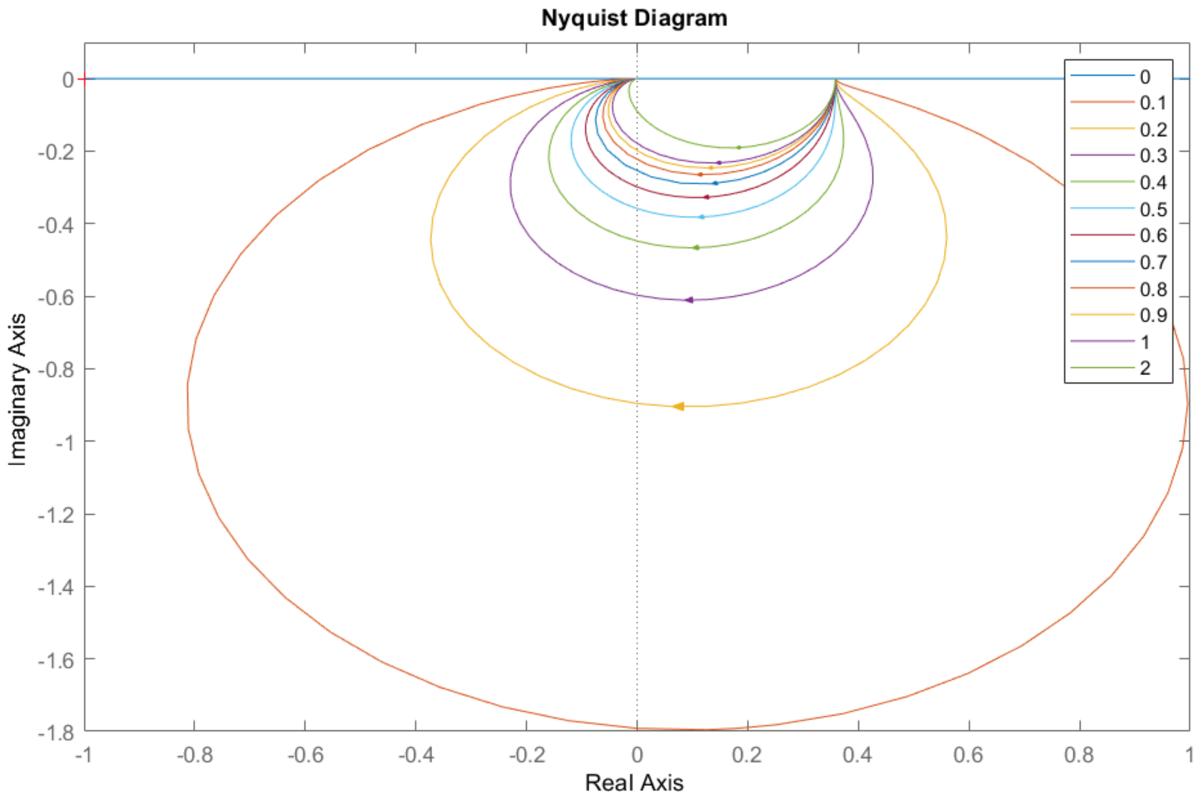

Рисунок 2. АФЧХ для конкретного колебательного звена при различных ξ

АЧХ колебательного звена при $\xi < 0{,}707$ на определенной частоте имеет максимум, которая, после исследования функции на экстремум, может быть найдена по следующей формуле:

$$\omega_m = \frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{T_0} = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}. \quad (14)$$

Определение резонансной частоты в литературе толкуется неоднозначно. В [2] автор указывает, что в случае воздействия на колебательное звено гармонически изменяющейся внешней силой, наибольшая амплитуда выходных колебаний будет иметь место при частоте воздействия $\omega_m = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$, называемой резонансной. Однако большинство авторов [3, 5] по теории колебаний, как правило, под «резонансной» частотой понимают некоторую частоту ω_0, определяемую, применительно к рассматриваемой модели, только массой и жесткостью пластины, без затухания.

Необходимо отметить, что АЧХ колебательного звена-пластины, приведенные выше, выражают зависимость смещения пластины от частоты внешней силы. В литературе [3] можно встретить зависимость скорости изменения смещения от частоты внешней силы. Данная функция представляет большой интерес, так как вне зависимости от значения относительного коэффициента затухания максимум характеристики приходится на резонансную частоту без затухания.

Если начальные условия не нулевые, ответ звена на воздействие гармонической внешней силой с единичной амплитудой (вынужденные колебания) и частотой Ω, представлен следующим образом:

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(x(0)\, e^{t\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}} + \dot{x}(0) e^{-t\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}\right) + H(\omega)\cos(\Omega t - \theta). \qquad (15)$$

Проанализируем полученное решение. Первый член выражения определяет собственные затухающие колебания. Из выражения видно, что при прошествии большого времени первый член затухает, и дальнейшие колебания определяются только вторым членом. Из [3] следует, что «установившиеся колебания, которые в линейной системе при гармонической внешней силе происходят не иначе, как по гармоническому же закону с частотой внешней силы».

Выводы

Таким образом, исследуя резонансные параметры колебаний пластины (колебательного звена) в предложенной модели, следует выделить следующие факты:

1) резонансная частота ω_0 зависит только от массы (в том числе присоединенной) и жесткости пластины;

2) сдвиг фазы между смещением пластины и вынуждающей силой на частоте ω_0, составляет $\frac{\pi}{2}$ (смещение пластины отстает от вынуждающей силы) и не зависит от затухания;

3) частота свободных затухающих колебаний пластины (при наличии демпфирования) при единичном воздействии зависит от демпфирования и выражается как $\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$, значение которой меньше резонансной;

4) частота, на которой отмечается максимум АЧХ (при $\xi < 0{,}707$), зависит от демпфирования и определяется как $\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$, значение которой меньше резонансной и собственной, указанной в п. 3;

5) при отсутствии сопротивления ($\xi = 0$) значения частот, указанные в п. 1, 3, 4, совпадают по значению;

6) частота, на которой отмечается максимум зависимости скорости смещения пластины от частоты внешней силы, имеет максимум при ω_0, значение которой не зависит от демпфирования.

Список используемых источников

1. Котов В.В., Ишинбаев Н.А., Краснов А.Н., Ситников А.В. Моделирование колебаний пластинного резонатора для определения вязкости и плотности скважинного флюида // Сетевое издание «Нефтегазовое дело». 2018. № 1. С. 16-24. URL: http://ogbus.ru/files/ogbus/issues/1_2018/ogbus_1_2018_p16-24_KotovVV_ru.pdf (дата обращения: 09.02.2020).

2. Воронов А.А. Теория автоматического управления: В 2 Ч. Теория линейных систем автоматического управления. М.: Высшая школа, 1986. Ч. 1. 367 с.

3. Иориш Ю.И. Виброметрия. Измерение вибрации и ударов. Общая теория, методы и приборы. М.: Машгиз, 1963. 771 с.

4. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1978. 255 с.

5. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 437 с.

References

1. Kotov V.V., Ishinbaev N.A., Krasnov A.N., Sitnikov A.V. Modelirovanie kolebanii plastinnogo rezonatora dlya opredeleniya vyazkosti i plotnosti skvazhinnogo flyuida [Modeling of Plate Vibrations for Viscosity and Density of Well Fliuds Estimation]. *Setevoe izdanie «Neftegazovoe delo» – Online Edition «Oil and Gas Business»*, 2018, No. 1, pp. 16-24. URL: http://ogbus.ru/files/ogbus/issues/1_2018/ogbus_1_2018_p16-24_KotovVV_ru.pdf (accessed 09.02.2020). [in Russian].

2. Voronov A.A. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya: V 2 Chastyakh. Teoriya lineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic Control Theory: In 2 Parts. Theory of Linear Automatic Control Systems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1986, Part 1. 367 p. [in Russian].

3. Iorish Yu.I. *Vibrometriya. Izmerenie vibratsii i udarov. Obshchaya teoriya, metody i pribory* [Vibrometry. Measurement of Vibration and Shock. General Theory, Methods and Instruments]. Moscow, Mashgiz Publ., 1963. 771 p. [in Russian].

4. Popov E.P. *Teoriya lineinykh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya i upravleniya* [Theory of Linear Systems of Automatic Regulation and Control]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 255 p. [in Russian].

5. Strelkov S.P. *Vvedenie v teoriyu kolebanii* [Introduction to Vibration Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 437 p. [in Russian].

Сведения об авторах

About the authors

Котов Виктор Владимирович, преподаватель, аспирант кафедры «Автоматизация технологических процессов и производств», УГНТУ, г. Уфа, Российская Федерация

Viktor V. Kotov, Lecturer, Postgraduate Student of Automation of Technological Processes and Industrial Facilities Department, USPTU, Ufa, Russian Federation

e-mail: kotwi@rambler.ru

Ишинбаев Николай Александрович, канд. техн. наук, доцент кафедры «Автоматизация технологических процессов и производств», УГНТУ, г. Уфа, Российская Федерация

Nikolay A. Ishinbaev, Candidate of Engineering Sciences, Assistant Professor of Automation of Technological Processes and Industrial Facilities Department, USPTU, Ufa, Russian Federation

e-mail: inaufa@yandex.ru