

UDC 532.1

**CALCULATION OF HYDRODYNAMIC PARAMETERS
FOR VISCOPLASTIC OIL FILTRATION IN THE STATIONARY CASE**

**РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ НЕФТИ
В СТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ**

N.N. Morozkin, M.Ya. Istrafilev

FSBEI HPE “Bashkir State University”, Ufa, the Russian Federation

Морозкин Н.Н., Истрафилов М.Я.

ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,

г. Уфа, Российская Федерация

e-mail: nnm_89@mail.ru

Abstract. The article is devoted to the calculating analysis of established filtering process. The results of calculations are presented in graphical form. Charts are provided with axis labels, and detailed explanations are given.

Main hydrodynamic parameters (pressure distribution, filtration rate, pressure gradient, viscosity) of the viscoplastic oil layer in the problem of stationary filtration are calculated. It is assumed that the process of filtering is radially symmetric. The model of finite layer is used. Predetermined pressure is maintained on the boundary of the layer. Oil is considered weakly fluid and its density is determined by formula [4]. At the same time it is assumed that oil viscosity depends on pressure gradient and this dependence is approximated by the sigmoid function [2]. The proposed problem is solved by the method of finite differences using Newton's method to solve the nonlinear system of equations.

The main features of hydrodynamic curves in the proposed type of modelling are distinguished and their differences from the case of constant

viscosity are found. So pressure distribution curve of viscoplastic oil lies below the pressure distribution curve of conventional oil, therefore in every point of layer pressure values for viscoplastic oil are smaller than corresponding values for oil with constant viscosity.

For the test, calculation basic input parameters are fixed in this paper: extent of the layer, pressure on the boundary of the layer, initial density, viscosity with maximally destroyed structure, viscosity with not destroyed structure, compressibility coefficient, while the following parameters alternately vary: values of shear gradient, smoothness with the approximation of dependence of viscosity on pressure gradient. Assessment of impact of these parameters on pressure distribution, pressure gradient, viscosity, and filtration rate in radius of the layer is conducted. In conclusion the main results of the investigation are summarized.

Аннотация. Статья посвящена расчетному анализу установившегося процесса фильтрации. Результаты расчетов представлены в графическом виде. Графики снабжены подписями осей, к ним приведены подробные пояснения.

В работе рассчитываются основные гидродинамические параметры вязкопластичного нефтяного пласта для задачи стационарной фильтрации (распределение давления, скорость, градиент давления, вязкость). Предполагается, что процесс фильтрации радиально симметричен. Используется модель конечного пласта. На границе пласта поддерживается заданное давление. Нефть считается слабосжимаемой жидкостью, ее плотность определяется по формуле [4]. При этом предполагается, что вязкость нефти зависит от градиента давления и эта зависимость аппроксимируется сигмойдной функцией [2]. Поставленная задача решается методом конечных разностей с использованием метода Ньютона для решения нелинейной системы уравнений.

Выделены основные особенности гидродинамических кривых при данном способе моделирования, их отличия от случая постоянной

вязкости. Так кривая распределения давления вязкопластичной нефти лежит ниже уровня кривой распределения давления обычной нефти, следовательно, в каждой точке пласта значения давлений для вязкопластичной нефти будет меньше соответствующих значений для нефти с постоянной вязкостью.

Для тестового расчета в работе фиксируются основные входные параметры: размер пласта, давление на границе пласта, начальная плотность, вязкость при максимально разрушенной структуре, вязкость при неразрушенной структуре, коэффициент сжимаемости, в то время как следующие параметры поочередно варьируются: значения градиента сдвига, гладкость при аппроксимации зависимости вязкости от градиента давления. Проведена оценка влияния данных параметров на распределение давления, градиента давления, вязкости и скорости по радиусу пласта.

Key words: Viscoplastic oil, stationary filtration, sigmoid function, the dependence of viscosity on pressure gradient, shear gradient, shear stress, smoothness parameter.

Ключевые слова: вязкопластичная нефть, стационарная фильтрация, сигмоидная функция, зависимость вязкости от градиента давления, градиент сдвига, напряжение сдвига, параметр гладкость.

1 Formulation of the problem

The mathematical model of radially symmetric process of viscoplastic weakly compressible oil stationary filtration in the vicinity of the well is described by the following equations:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \rho \bar{v}] = 0, \quad R_w \leq r \leq R_k \quad (1)$$

$$v = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2)$$

With boundary conditions:

$$\begin{aligned} p(R_w) &= P_0 \\ p(R_k) &= R_k \end{aligned} \quad (3)$$

wherein the oil density is determined by formula [4],

$$\rho = \rho_0(1 + \beta(p - P_0)) \quad (4)$$

Here $\rho = \rho(p)$ is density, v is filtration rate, k is permeability coefficient, p is pressure, $\mu = \mu\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)$ is environment viscosity.

The dependence of oil viscosity on pressure gradient is specified by the following function:

$$\mu = \mu\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \left(\frac{\mu_H - \mu_L}{1 + e^{\frac{glad}{G} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - G\right)}} + \mu_L \right) \quad (5)$$

wherein μ_L – viscosity with maximally destroyed structure, μ_H – viscosity with not destroyed structure; G - the value of shear gradient; $glad$ – the parameter which mathematically characterizes the degree of smoothness of a viscosity function and physically – speed of destruction of structure.

Experimental parameters of the dependence of viscoplastic oil viscosity on shear stress are shown in the paper [1]. These experimental data were accurately approximated by the function of the following form:

$$\mu = \mu\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \left(\mu_m + \frac{\mu_0 - \mu_m}{1 + e^{B(\tau - \tau_n)}} \right) \quad (6)$$

Wherein μ_m – viscosity with maximally destroyed structure, μ_0 – viscosity with not destroyed structure, τ - shear stress, B is a coefficient characterizing speed of destruction of structural bonds in the system. It is evident that formula (5) of the dependence of viscosity on pressure gradient used in this work is similar to the formula (6) of the dependence of viscosity on shear stress which was obtained as a result of experimental data approximation. This indirectly

confirms that formula (5) sufficiently accurately reflects physics of the process of viscoplastic oil filtration.

Since $\mu_H - \mu_L = const$, formula (5) can be written as (7),

$$\mu = \mu \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = \left(\frac{\mu_{H-L}}{1 + e^{\frac{\text{glad} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - G \right)}}} + \mu_L \right) \quad (7)$$

where $\mu_{H-L} = \mu_H - \mu_L$.

The problem

Calculate basic hydrodynamic parameters in the problem of stationary filtering of viscoplastic oil described by equations of (1) - (4) (7). The proposed problem was solved by the method of finite differences [5]. To solve nonlinear system of algebraic equations we used the Newton method. For accelerating and clarifying of calculations we used uneven grids constructed as in [3].

2 Results of computational experiments

For the test example, the following input data were used: $R_w = 0.1$ m; $R_k = 100$ m; $\beta = 10^{-8}$ 1/Pas; $\rho_0 = 1000$ kg/m³; $P_0 = 10$ MPa; $P_k = 5$ MPa; $\mu_H = 0.1$ Pa·s; $G = 1.5 \cdot 10^5$ Pa/m; $\mu_L = 0.001$ Pa·s, $\text{glad} = 10$.

The graph of the dependence of viscosity on pressure gradient for the considered case is presented in figure 1.

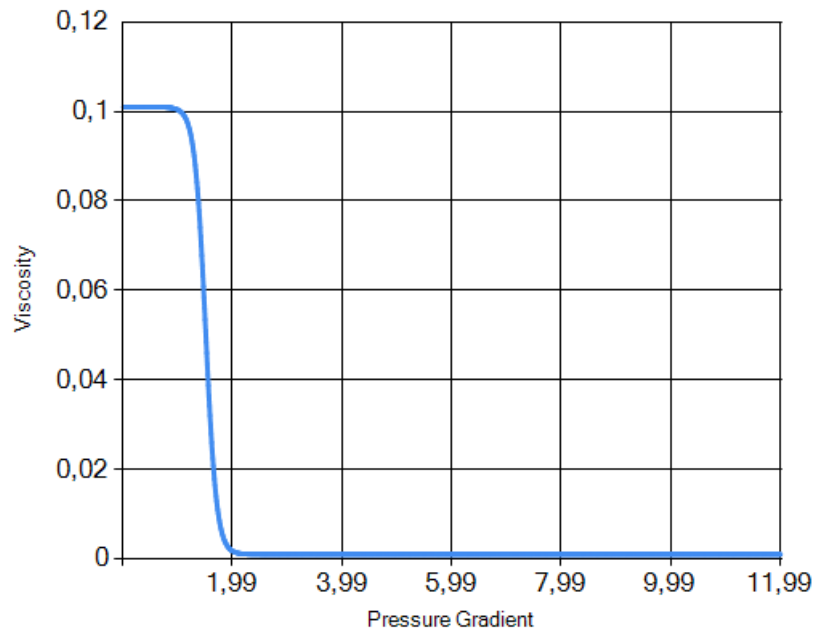


Figure 1. The dependence of viscosity on pressure gradient

2.1 Comparison the results of filtering problem solution in the case of dependence of viscosity on pressure gradient with the results of problem solution with constant viscosity

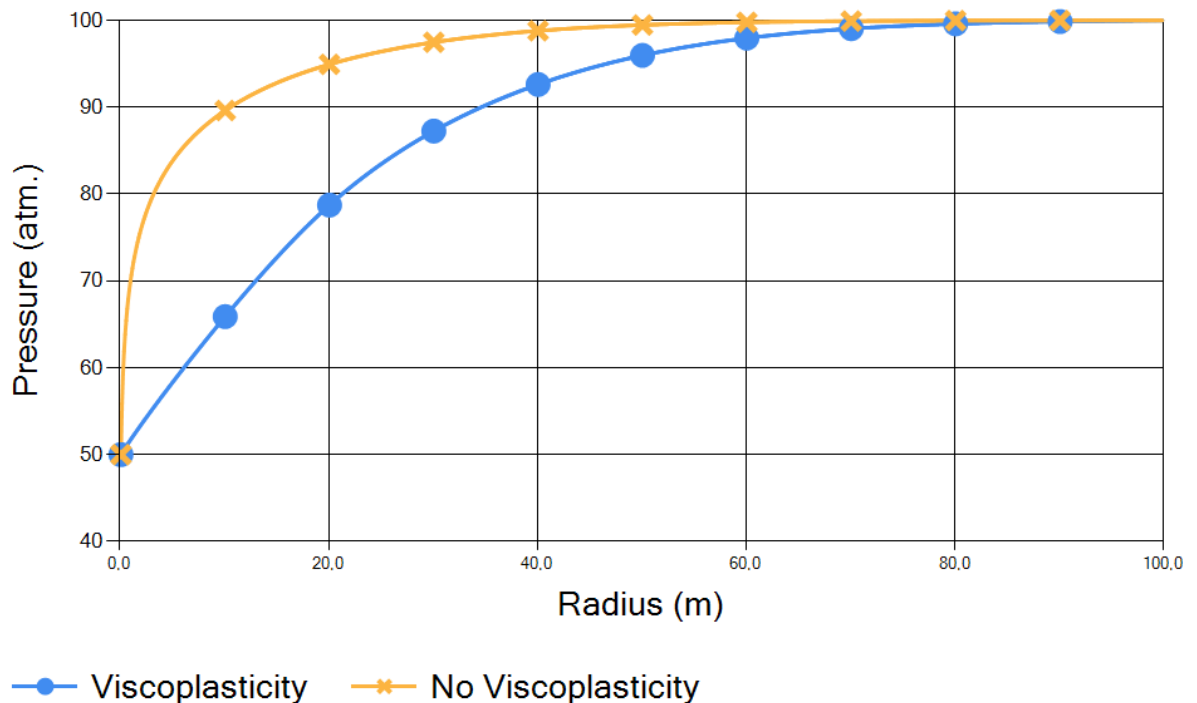


Figure 2.1. Pressure distribution along the radius for the stationary filtering case

The figure 2.1 shows that in the stationary case in every point of layer pressure values for viscoplastic oil are smaller than corresponding values for oil

with constant viscosity, e.i. $\forall r \in (R_w, R_k) P_1(r) > P_2(r)$. This fact is a typical feature of viscoplastic oils.

Distribution of pressure gradient along the radius of layer is shown in figure 2.2. This figure demonstrates that in the well's vicinity pressure gradient for the oil with constant viscosity is greater than pressure gradient of viscoplastic oil. Then curves are intersected and the pressure gradient of viscoplastic oil becomes greater.

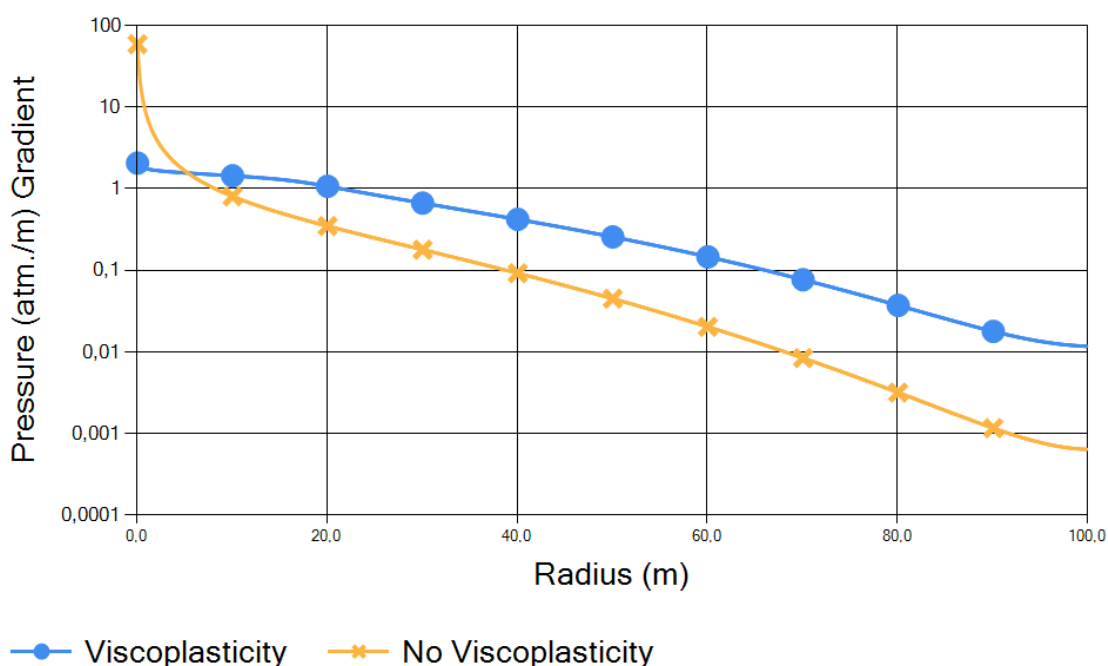


Figure 2.2. Distribution of pressure gradient along the radius

Comparing obtained results, one can come to the conclusion that the differences between viscoplastic oil and Newtonian oil in the case of the stationary filtering problem are significant.

2.2 Results of calculations with different values of the shear gradient

Let's consider how the basic hydrodynamic parameters change at variations of the shear gradient.

You can see at the figure 2.3 that the greater the shear gradient is the closer pressure distribution to the case of constant viscosity. With decreasing values of the shear gradient the pressure distribution becomes closer to linear form.

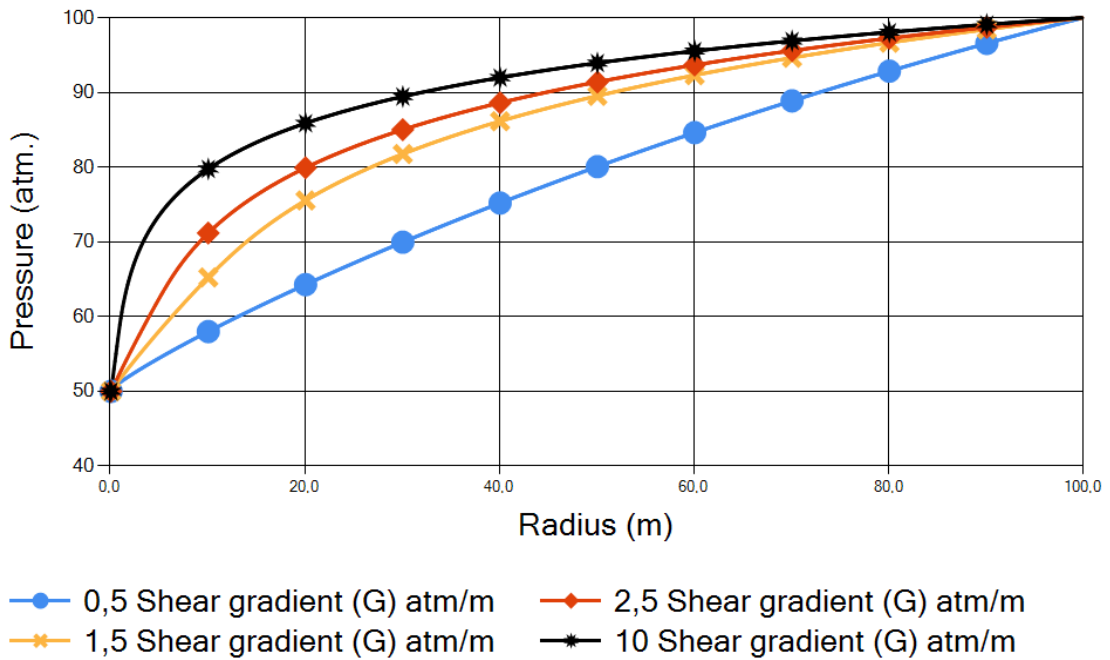


Figure 2.3. Pressure distribution along the radius for different values of shear gradient

Graphs of the pressure gradient distribution along the radius with different values of shear gradient are presented in figure 2.4. It can be seen that all the curves intersect in different points and with increase of quantity of shear gradient the point of intersection of these curves approaches the well.

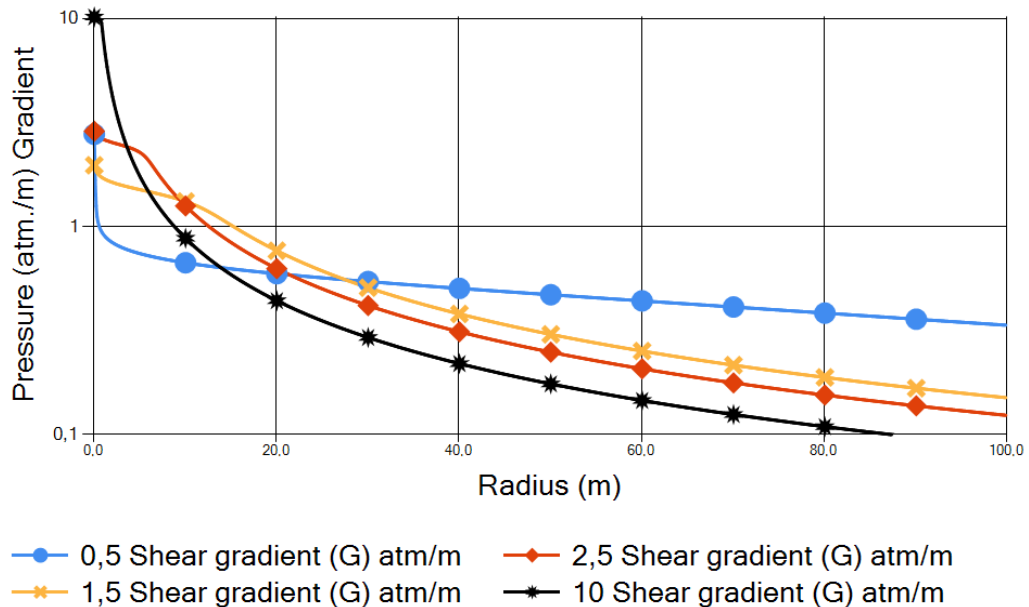


Figure 2.4. Distribution of pressure gradient along the radius under different values of shear gradient

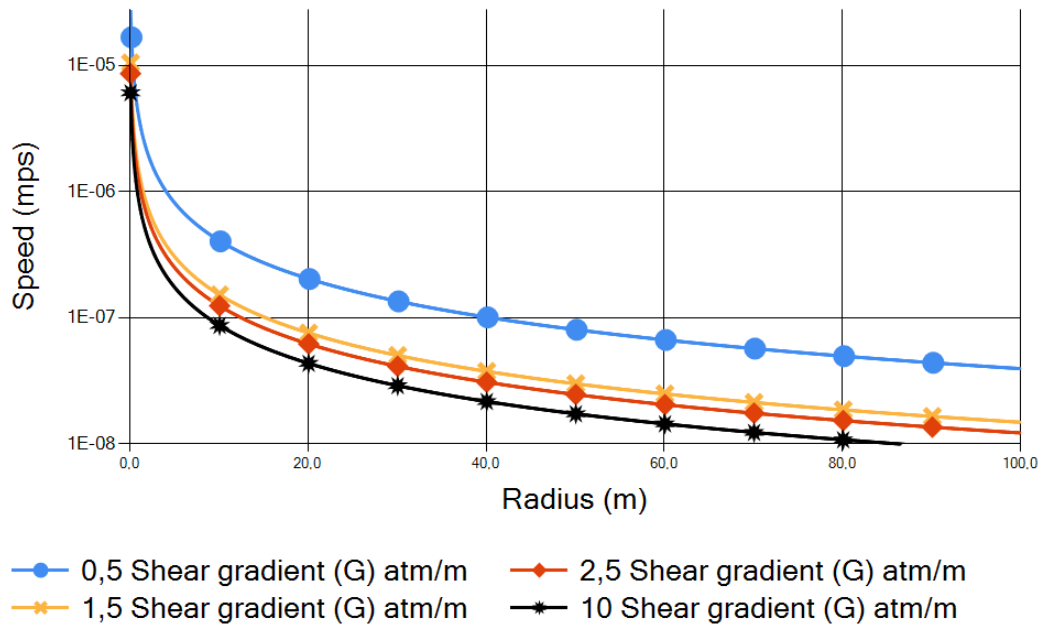


Figure 2.5. Distribution of the filtration rate along the radius with different shear gradient values

Figure 2.5 shows that, unlike the curves of the pressure gradient, oil rate curves with various values of shear gradient do not intersect.

Figure 2.6 shows how the function of viscosity depends on radius. As can be seen from the figure, the greater shear gradient is, the more stepped form has the function of dependence of viscosity on radius.

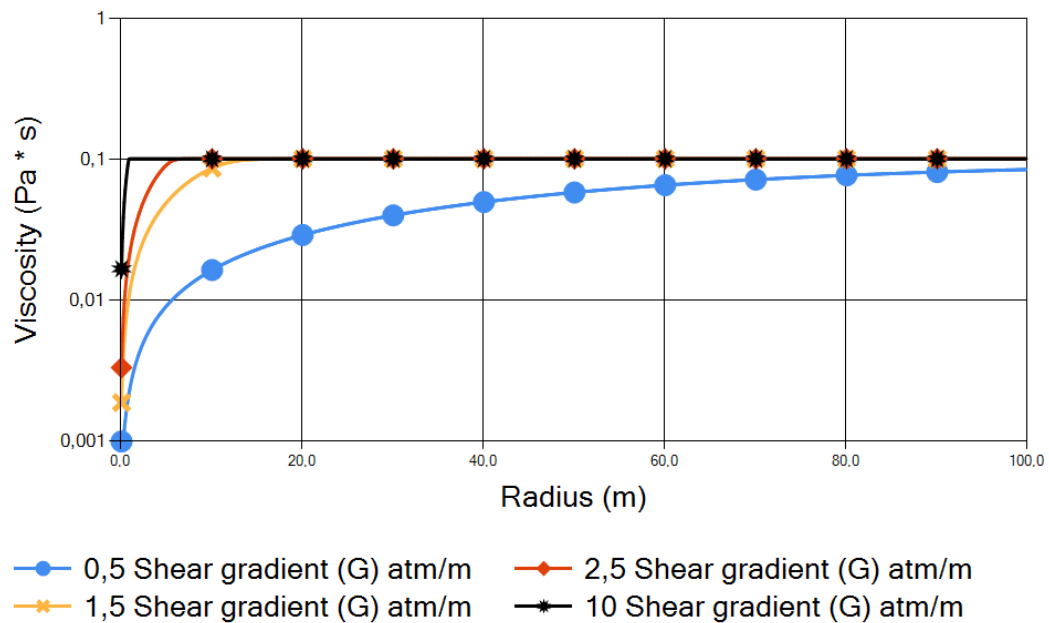


Figure 2.6. Distribution of the viscosity along the radius with different shear gradient values

Thus figures 2.3 – 2.6 show that shear gradient of viscoplastic oil has significant impact on the main hydrodynamic parameters.

2.3 Varying of the parameter of smoothness “glad” in the formula of dependence of viscosity on pressure gradient

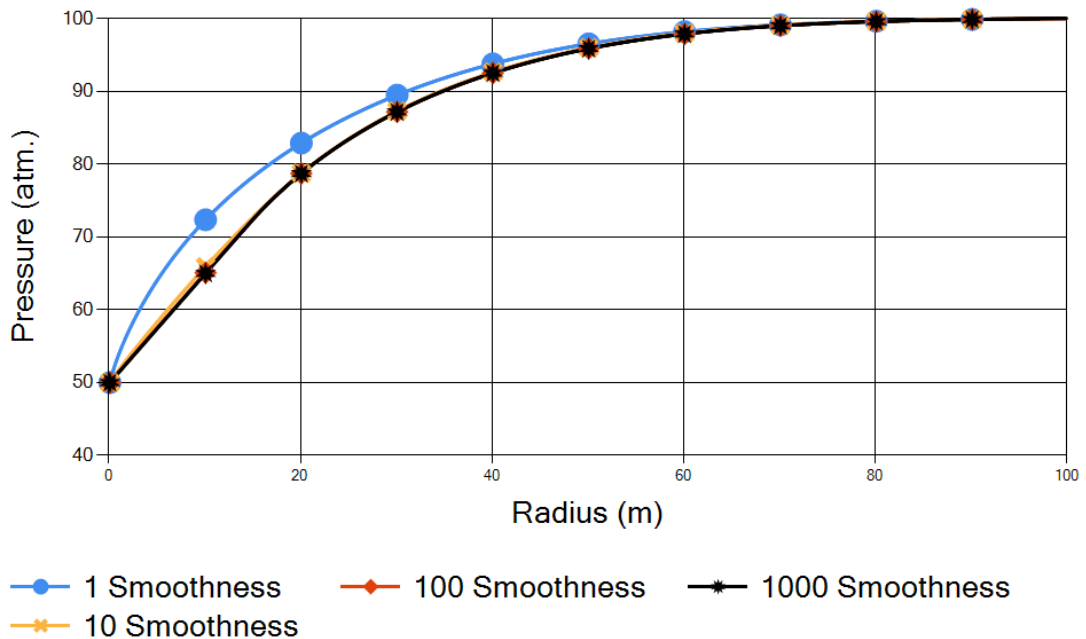


Figure. 2.7. Distribution of pressure along the radius with different values of smoothness coefficient

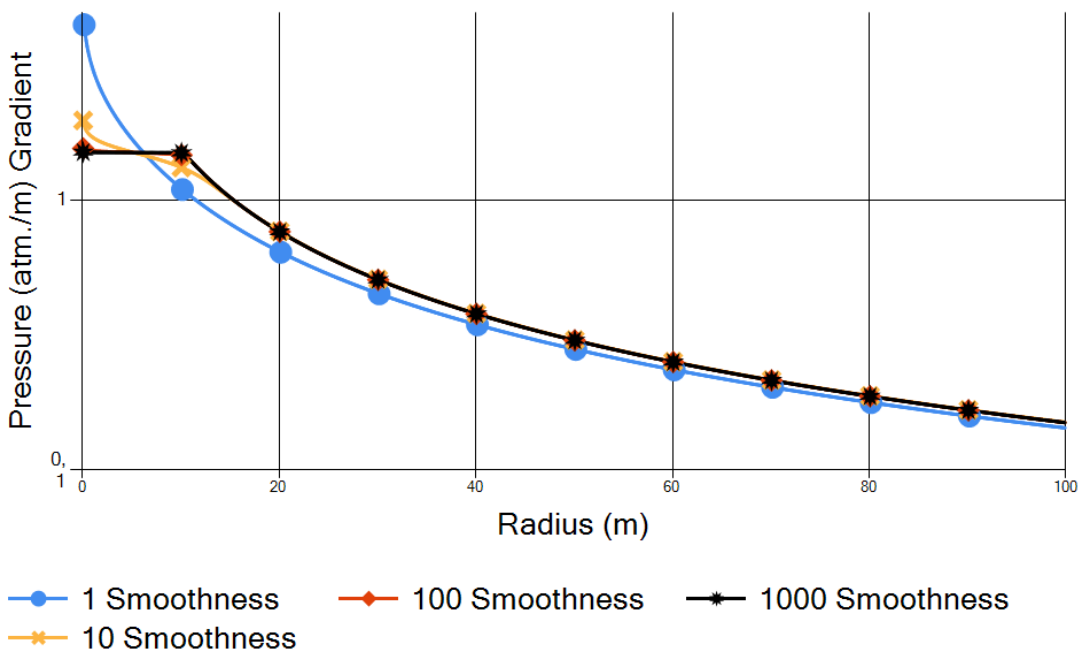


Figure 2.8. Distribution of pressure gradient along the radius with different values of smoothness coefficient

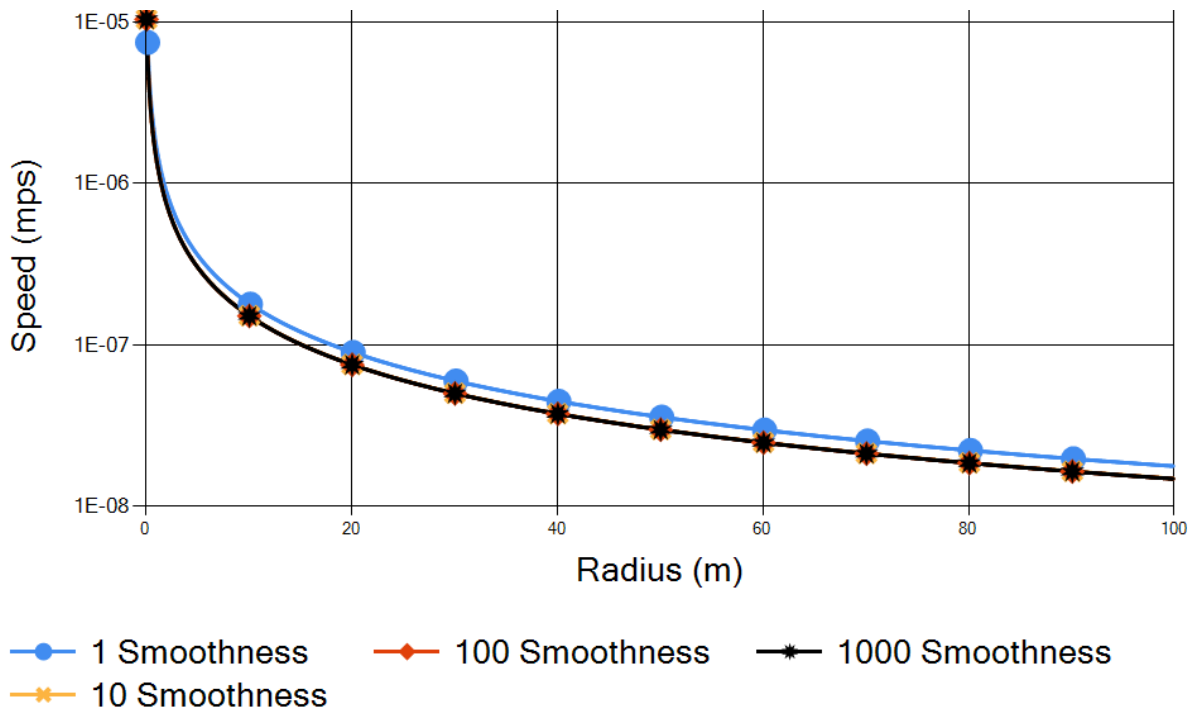


Figure 2.9. Distribution of the filtration rate along the radius with different smoothness coefficient values

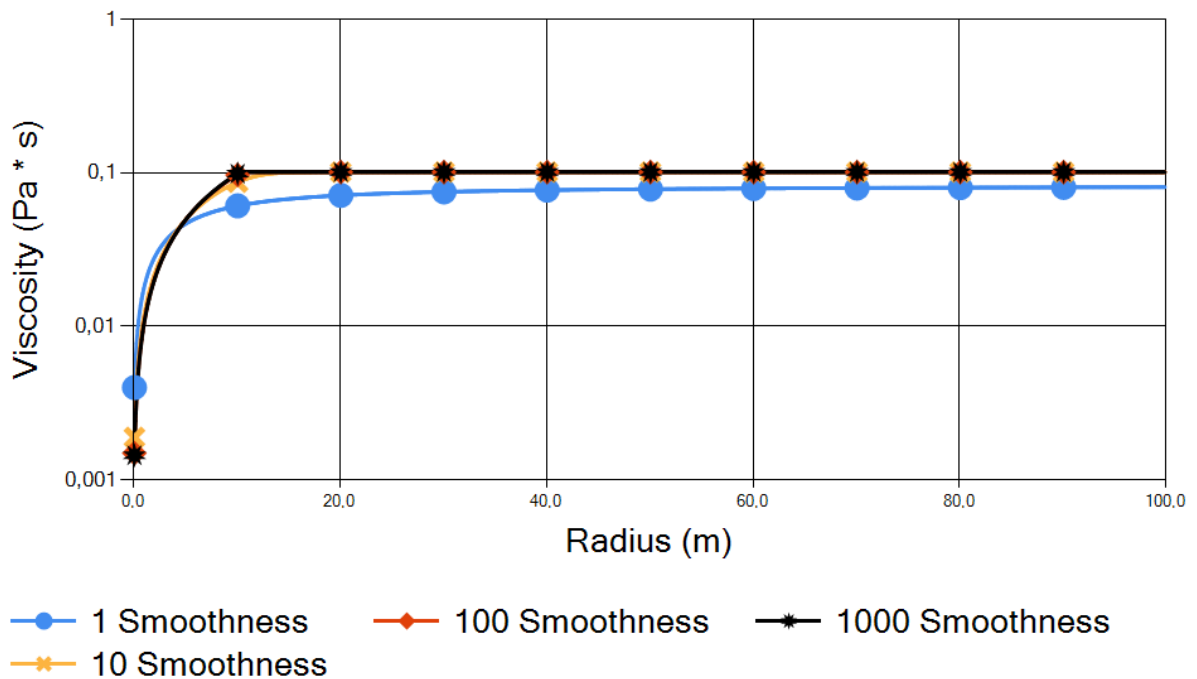


Figure 2.10. Distribution of viscosity along the radius with different values of smoothness coefficient

Thus, we can conclude that parameter “glad” in the range glad = [1;10] makes quite significant effect on basic hydrodynamic parameters, and in the interval “glad” = (10; 1000] option makes no significant effect.

Conclusions

One can make the following conclusions on the basis of numerical research conducted in the article:

1. In a stationary case the differences of viscoplastic oil from Newtonian oil are significant. In addition, the graph of dependence of pressure on radius for viscous-plastic liquid is located lower than the analogous graph for Newtonian fluid.

2. Shear gradient makes significant impact on the main hydrodynamic parameters.

3. The parameter of smoothness in the range $glad = [1;10]$ makes quite significant effect, and in the interval $glad = (10; 1000]$ option makes no significant effect on basic hydrodynamic parameters.

1 Постановка задачи

Математическая модель радиально симметричного в окрестности скважины процесса стационарной фильтрации вязкопластичной слабосжимаемой нефти описывается следующими уравнениями:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \rho \bar{v}] = 0, \quad R_w \leq r \leq R_k \quad (1)$$

$$v = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2)$$

С граничными условиями:

$$\begin{aligned} p(R_w) &= P_0 \\ p(R_k) &= P_k \end{aligned} \quad (3)$$

где плотность нефти определяется по формуле [4],

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta(p - P_0)) \quad (4)$$

Здесь $\rho = \rho(p)$ – плотность, v – скорость фильтрации, k – коэффициент проницаемости, p – давление, $\mu = \mu\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)$ – вязкость среды.

Зависимость вязкости нефти от градиента давления задается следующей функцией:

$$\mu = \mu\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \left(\frac{\mu_H - \mu_L}{1 + e^{-glad\left(\frac{\partial p}{\partial r} - G\right)}} + \mu_L \right) \quad (5)$$

где μ_L – вязкость при максимально разрушенной структуре, μ_H – вязкость при неразрушенной структуре; G – значение градиента сдвига; $glad$ – параметр, который математически характеризует степень гладкости функции вязкости, а физически скорость разрушения структуры.

Отметим, что в работе [1] приведены экспериментальные данные зависимости вязкости вязкопластичной нефти от напряжения сдвига. Эти

экспериментальные данные были достаточно точно аппроксимированы функцией следующего вида:

$$\mu = \mu \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = \left(\mu_m + \frac{\mu_0 - \mu_m}{1 + e^{B(\tau - \tau_n)}} \right) \quad (6)$$

где μ_m – вязкость при максимально разрушенной структуре, μ_0 – вязкость при неразрушенной структуре, τ – напряжение сдвига, B – коэффициент, характеризующий скорость разрушения структурных связей в системе. Очевидно, что формула (5) зависимости вязкости от градиента давления, используемая в данной работе, аналогична формуле (6) зависимости вязкости от напряжения сдвига, которая была получена в результате аппроксимации экспериментальных данных. Это косвенно подтверждает, что формула (5) достаточно точно отражает физику процесса фильтрации вязкопластичной нефти.

Так как, $\mu_H - \mu_L = const$, формулу (5) можно записать в виде (7),

$$\mu = \mu \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = \left(\frac{\mu_{H-L}}{1 + e^{\frac{glad(\frac{\partial p}{\partial r} - G)}}} + \mu_L \right) \quad (7)$$

где $\mu_{H-L} = \mu_H - \mu_L$.

Задача. Рассчитать основные гидродинамические параметры в задаче стационарной фильтрации вязкопластичной нефти, описываемой уравнениями (1) - (4), (7).

Поставленная задача решалась методом конечных разностей. При этом для решения нелинейной системы алгебраических уравнений применялся метод Ньютона. С целью ускорения и уточнения расчетов использовались неравномерные сетки, построенные по способу, предложенному в [3].

2 Результаты вычислительных экспериментов

Для тестового примера использовались следующие входные данные: $R_w = 0,1$ м; $R_k = 100$ м; $\beta = 10^{-8}$ 1/Па; $\rho_0 = 1000$ кг/м³; $P_0 = 10$ МПа; $P_k = 5$ МПа; $\mu_H = 0,1$ Па·с; $G = 1,5 \cdot 10^5$ Па/м; $\mu_L = 0,001$ Па·с, $glad = 10$.

На рисунке 1 приведен график зависимости вязкости от градиента давления, для рассматриваемого случая.

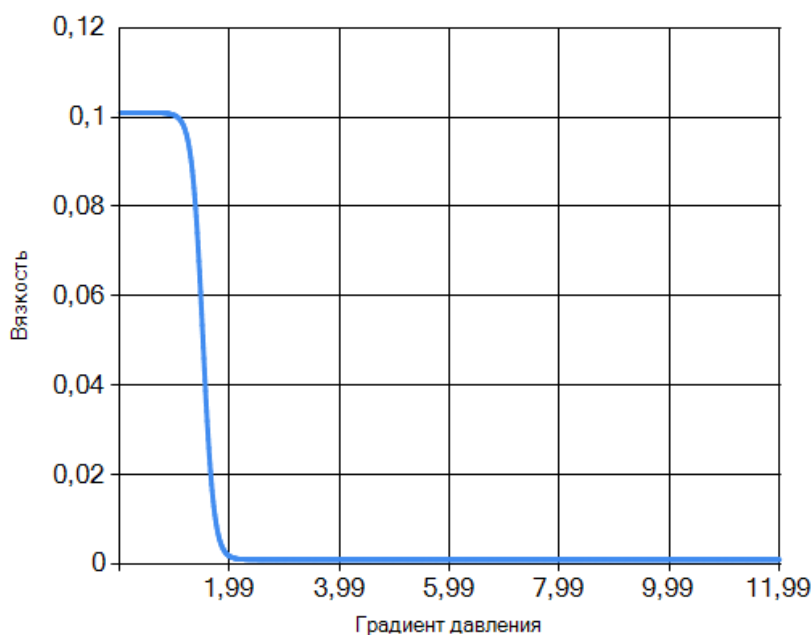


Рисунок 1. Зависимость вязкости от градиента давления

2.1 Сравнение результатов решения задачи фильтрации с учетом зависимости вязкости от градиента давления с результатами решения задачи с постоянной вязкостью

Из рисунка 2.1 следует, что в стационарном случае в каждой точке пласта значения давлений для вязкопластичной нефти меньше соответствующих значений для нефти с постоянной вязкостью, то есть $\forall r \in (R_w, R_k) P_1(r) > P_2(r)$, данный факт является характерной особенностью вязкопластичных нефтей.

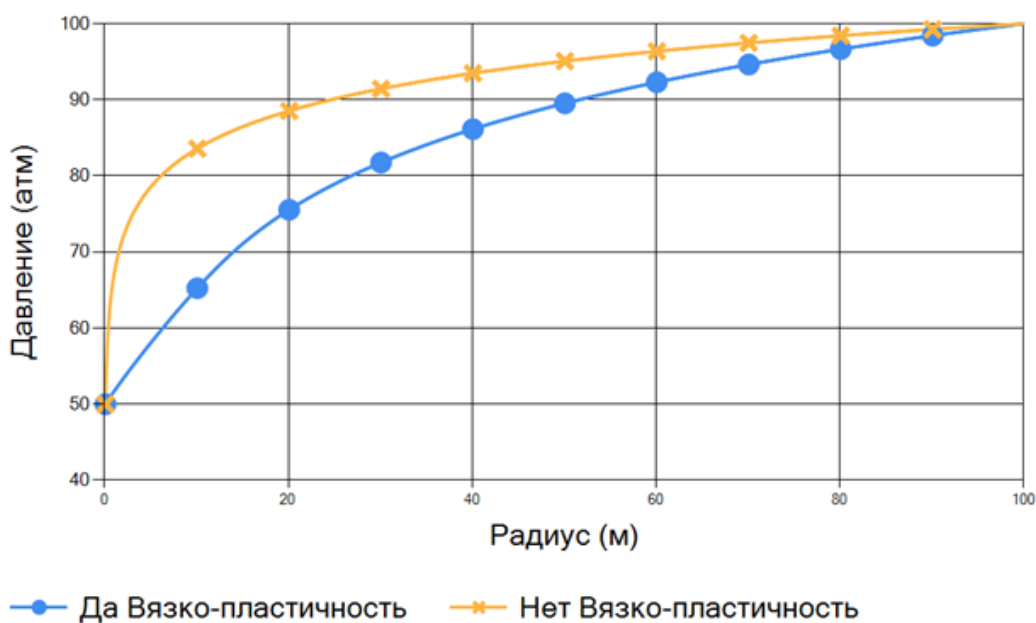


Рисунок 2.1. Распределение давления по радиусу для случая стационарной фильтрации

На рисунке 2.2 показано распределение градиента давления по радиусу пласта. Из данного рисунка следует, что в окрестности скважины градиент давления для нефти с постоянной вязкостью больше градиента давления вязкопластичной нефти. Далее кривые пересекаются, и градиент давления вязкопластичной нефти становится больше градиента давления нефти с постоянной вязкостью.

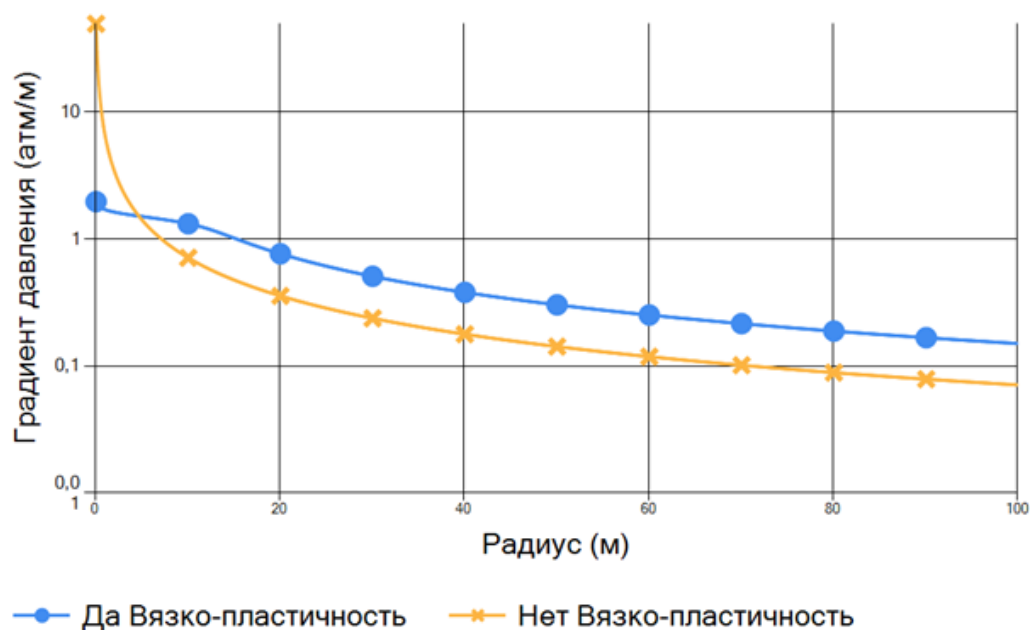


Рисунок 2.2. Распределение градиента давления по радиусу

Сравнивая полученные расчетные результаты, можно сделать вывод, что отличия между вязкопластичной нефтью и ньютоновской нефтью в случае стационарной задачи фильтрации носят существенный характер.

2.2 Результаты расчетов при различных значениях градиента сдвига

Рассмотрим, как изменяются основные гидродинамические параметры при варьировании градиента сдвига.

На рисунке 2.3 видно, что чем больше градиент сдвига, тем ближе распределение давления приближается, к варианту с постоянной вязкостью. При уменьшении значения градиента сдвига распределение давления по радиусу приближается к линейному виду.

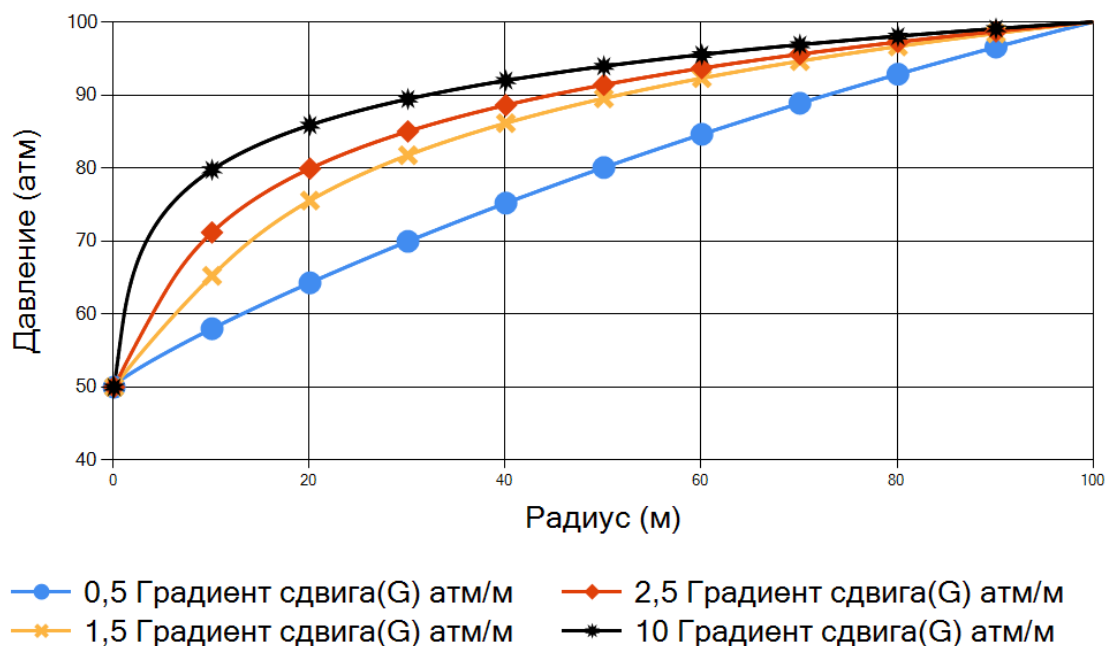


Рисунок 2.3. Распределение давления по радиусу при различных значениях градиента сдвига

На рисунке 2.4 представлены графики распределения по радиусу градиента давления при различных значениях градиента сдвига. Из рисунка видно, что все кривые пересекаются в различных точках и с увеличением величины градиента сдвига, точки пересечения этих кривых приближаются к скважине.

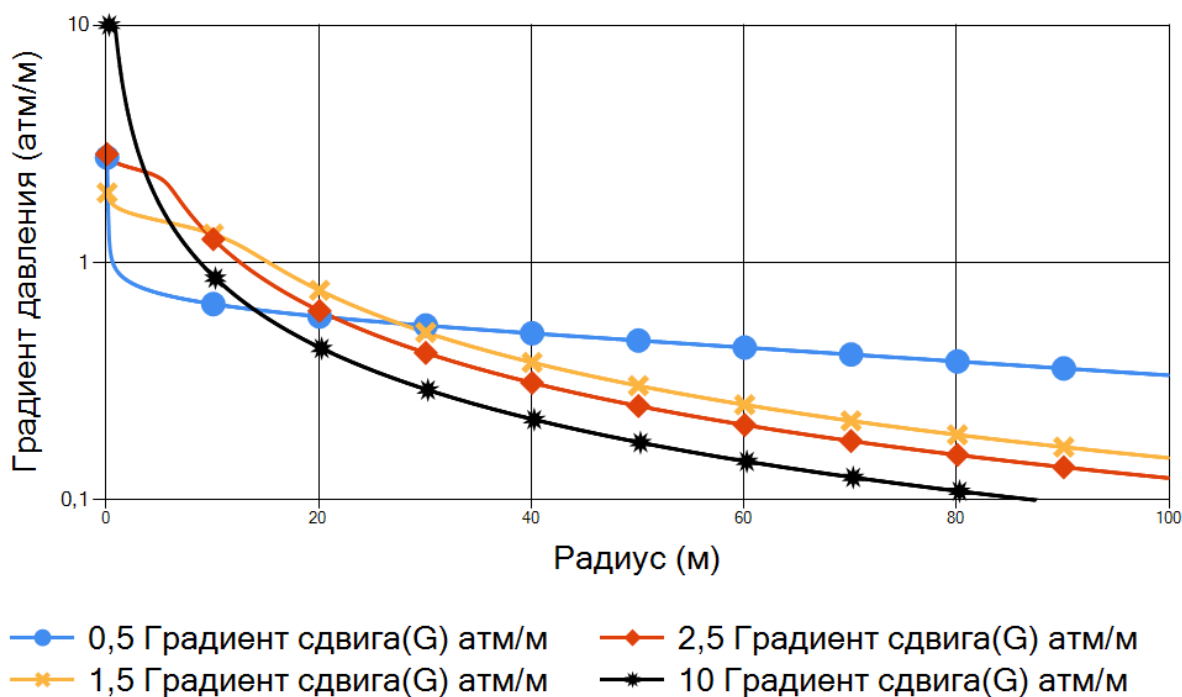


Рисунок 2.4. Распределение градиента давления по радиусу при различных значениях градиента сдвига

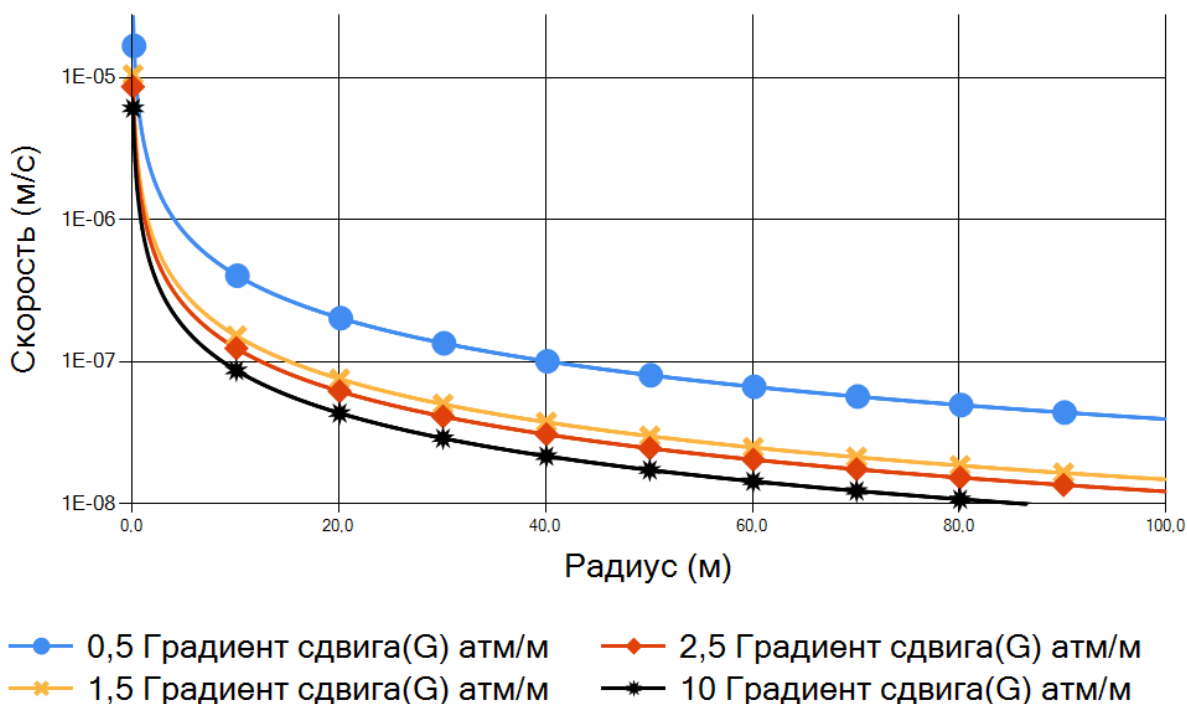


Рисунок 2.5. Распределение скорости фильтрации по радиусу при различных значениях градиента сдвига

Из рисунка 2.5 следует, что в отличие от кривых градиента давления, кривые скорости, при различных значениях градиента сдвига не пересекаются.

Рисунок 2.6 показывает, как функция вязкости зависит от радиуса. Как видно из рисунка, чем больше градиент сдвига, тем более ступенчатый имеет вид функция зависимости вязкости от радиуса.

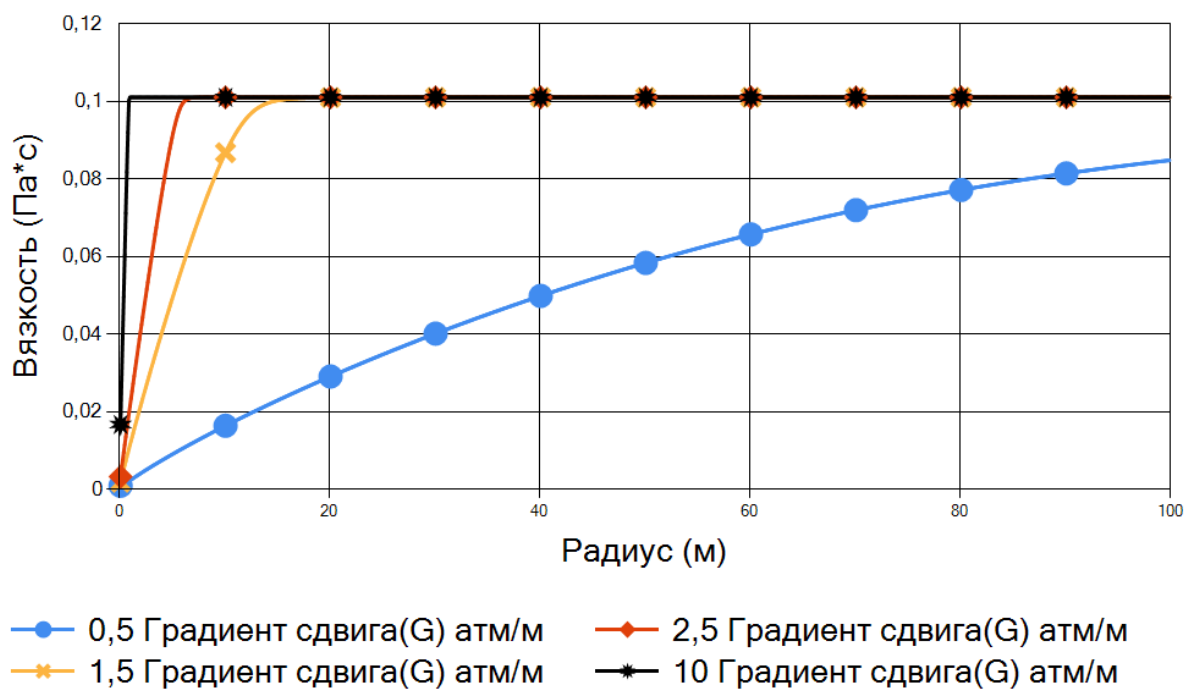


Рисунок 2.6. Распределение вязкости по радиусу при различных значениях градиента сдвига

Таким образом, рисунки 2.3 – 2.6 показывают, что градиент сдвига вязкопластичной нефти оказывает существенное влияние на основные гидродинамические параметры.

2.3 Варьирование параметра гладкости $glad$ в формуле зависимости вязкости от градиента давления

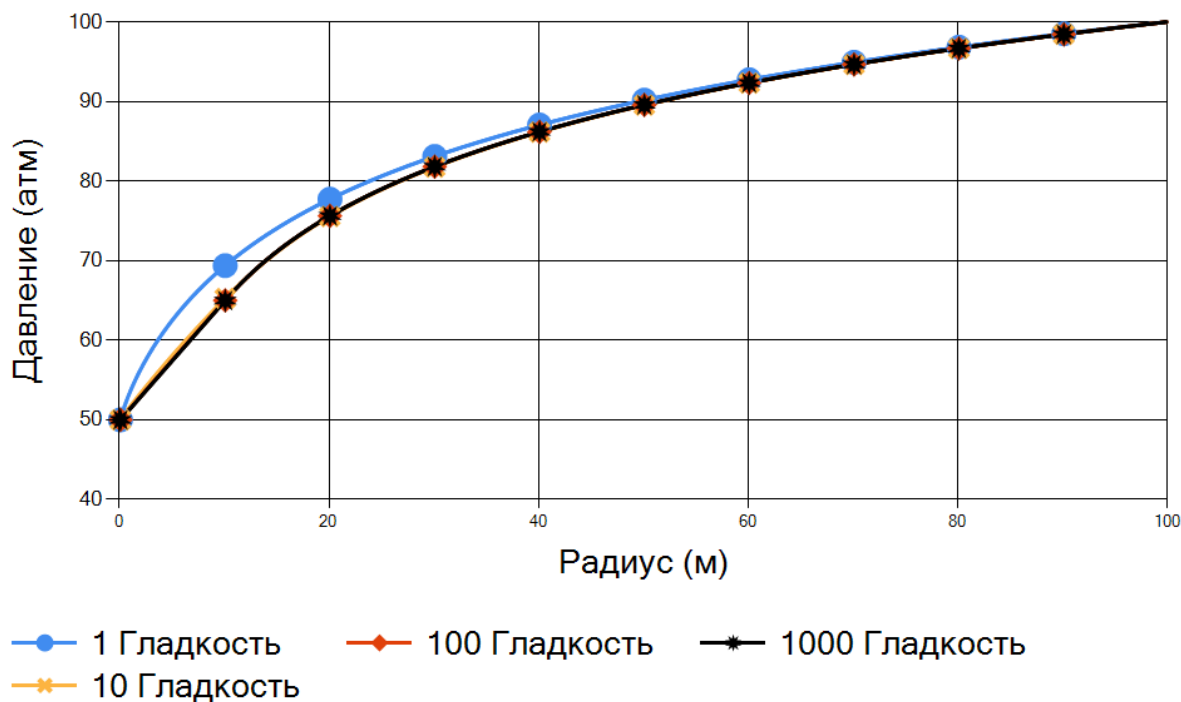


Рисунок 2.7. Распределение давления по радиусу при различных значениях коэффициента гладкости

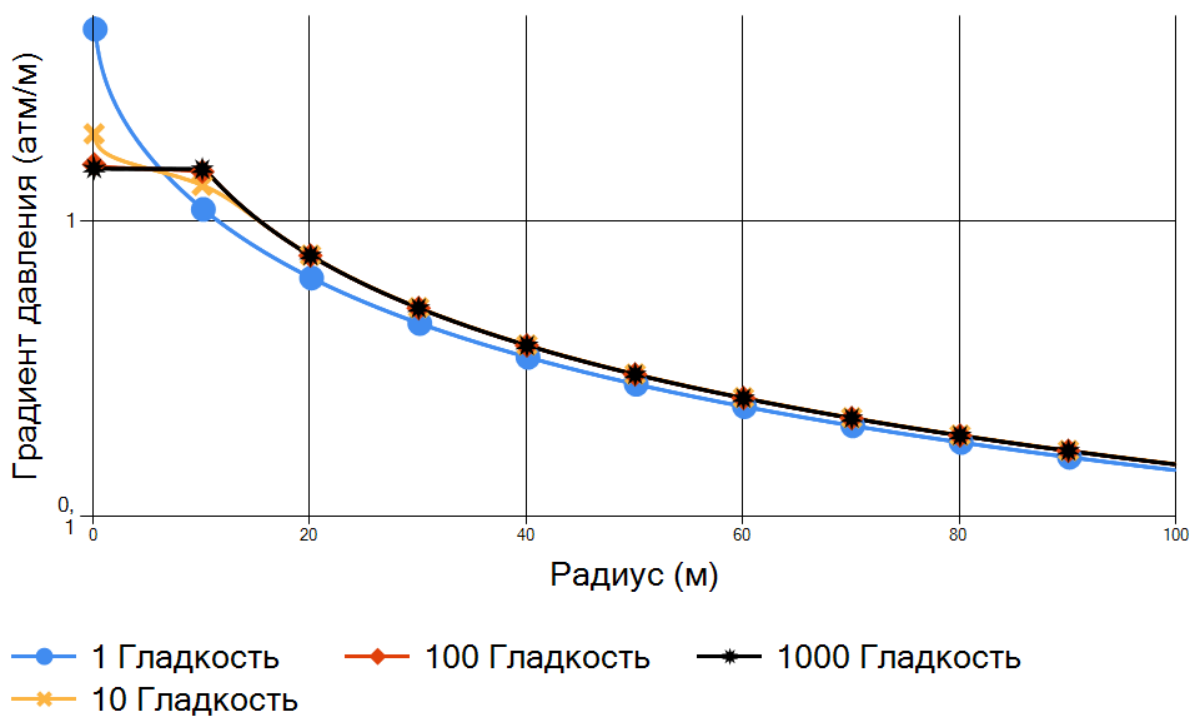


Рисунок 2.8. Распределение градиента давления по радиусу при различных значениях коэффициента гладкости

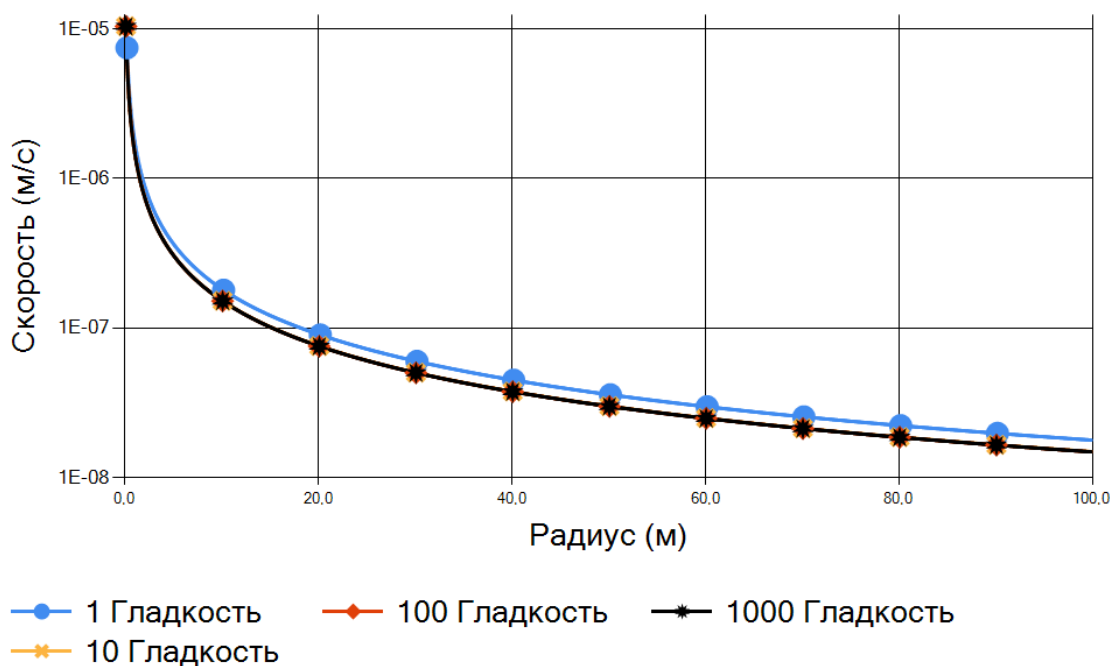


Рисунок 2.9. Распределение скорости фильтрации по радиусу при различных значениях коэффициента гладкости

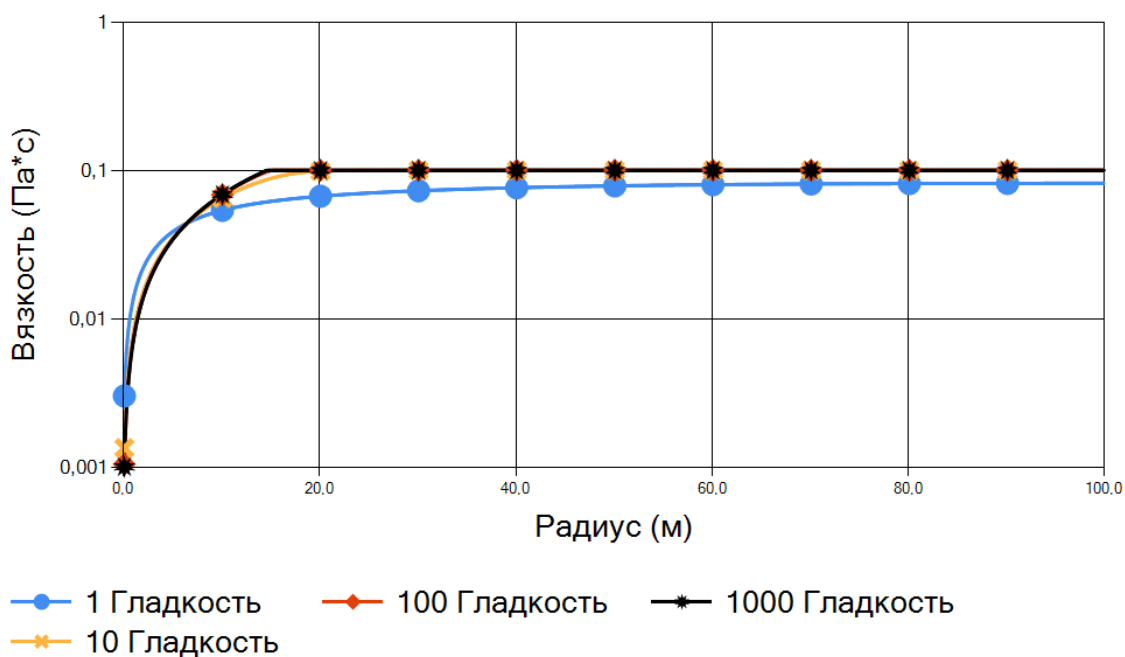


Рисунок 2.10. Распределение вязкости по радиусу при различных значениях коэффициента гладкости

Таким образом, можно сделать вывод, что влияние параметра $glad$ на основные гидродинамические параметры в промежутке $glad = [1, 10)$ довольно значительно, а в промежутке $glad = [10, 1000]$ параметр не оказывает существенного влияния.

Выводы

На основании проведенного в статье численного исследования можно сделать следующие выводы:

1. В стационарном случае отличия вязкопластичной нефти от ньютоновской нефти значительны, причем график зависимости давления от радиуса для вязкопластичной жидкости расположен ниже аналогичного графика для ньютоновской жидкости.

2. Градиент сдвига оказывает существенное влияние на основные гидродинамические параметры.

3. Влияние параметра «гладкость» на основные гидродинамические параметры в промежутке $glad = [1, 10)$ довольно значительно, а в промежутке $glad = [10, 1000]$ параметр не оказывает существенного влияния.

References

1. V.V. Devlikamov, Z.A. Khabibullin, M.M. Kabirov Anomalous Oils. M.: Nedra, 1975. 168 p. [in Russian].

2. N.N. Morozkin Modeling of the process of filtration of visco-plastic oil taking into account the dependence of viscosity on the gradient of pressure// Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 781-784. [in Russian].

3. N.N. Morozkin, A.A. Sadretdinov The decision of one filtration problem with the help of non-uniform meshes in space // Vestnik Bashkirskogo universiteta, 2013. Vol. 18. No. 4. Pp. 965-968. [in Russian].

4. A.A. Sadretdinov Non-isothermal Filtration of Contractive Fluid in the well-layer System: dis. ... Cand. Phys. and Math. Sciences: 01.04.14; Ufa, Bashkir State University, 2012. 125 p. [In Russian].

5. R.P. Fedorenko Introduction into computational physics, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, 1994. 528 p. [in Russian].

Список используемых источников

1. Девликамов В.В., Хабибуллин З.А., Кабиров М.М. Аномальные нефти. М.: Недра, 1975. 168 с.
2. Морозкин Н.Н. Моделирование процесса фильтрации вязко-пластичной нефти с учетом зависимости вязкости от градиента давления// Вестник Башкирского университета. 2014. Т. 19. №3. С. 781-784.
3. Морозкин Н.Н., Садретдинов А.А. Решение одной задачи фильтрации с использованием неравномерных сеток по пространству// Вестник Башкирского университета. 2013.Т. 18. №4. С. 965-968.
4. Садретдинов А.А. Неизотермическая фильтрация сжимаемого флюида в системе скважина-пласт: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.14; Уфа, БашГУ, 2012. 125 с.
5. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Моск. физ. техн. ин-та, 1994. 528 с.

About the authors

Сведения об авторах

N.N. Morozkin, Post-Graduate Student of the Chair “Mathematical Modelling”, Assistant of the Chair “Geophysics”, FSBEI HPE “Bashkir State University”, Ufa, the Russian Federation

Морозкин Н.Н., аспирант кафедры «Математическое моделирование», ассистент кафедры «Геофизика», ФГБОУ ВПО БашГУ, г. Уфа, Российская Федерация

e-mail: nnm_89@mail.ru

M.Ya. Istrafilev, Post-graduate Student of the Chair “Applied Informatics and Numerical Methods”, FSBEI HPE “Bashkir State University”, Ufa, the Russian Federation

Истрафилов М.Я., аспирант кафедры «Прикладная информатика и численные методы» ФГБОУ ВПО БашГУ, г. Уфа, Российская Федерация