

UDC 681.5.015

**ALGORITHM OF PARAMETRIC IDENTIFICATION  
OF WELLS CONNECTIVITY SYSTEM**

**АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ  
В ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА СВЯЗНОСТИ СКВАЖИН**

**B.L. Khashper, O.V. Nadezhdin, D.V. Efimov**

**FSBEI HPE “Bashkir State University”,  
LLC “BashNIPIneft”, Ufa, the Russian Federation**

**Хашпер Б.Л., Надеждин О.В., Ефимов Д.В.**

**ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,  
ООО «БашНИПИнефть», г. Уфа, Российская Федерация**

**e-mail: bella\_anna\_tw@mail.ru**

**Abstract.** Interaction analysis of injection and production wells is necessary for successful development of oil fields. Mathematically this problem can be reduced to the identification problem. In this article the problem of parametric multidimensional dynamic system identification of injection and production wells connectivity system has been considered. Existing parameter identification methods have been considered. The method of generalized adjusted object of measurement (GAOM) for solution of multidimensional dynamic system identification problem has been proposed. Existing identification methods (GAOM, prediction error method (Pem), subspace method of identification (N4sid)) have been implemented in Matlab. These algorithms have been tested for parametric identification of multidimensional dynamic system with zero initial conditions, with non-zero initial conditions, in the absence and presence of noise in measurement and control channels. The article contains comparative analysis of investigated methods which shows that GAOM is the most effective method for solution of the problem in the presence of noise in measurement and

control channels. The bootstrap analysis has been applied to the proposed method, and this allows improving quality of identification. The research has revealed that GAOM using bootstrap analysis is superior to GAOM without using bootstrap analysis in identification quality. It is planned to use GAOM for parametric identification of wells connectivity system and to develop the algorithm for identifying non-stationary dynamical systems.

**Аннотация.** При разработке нефтяных месторождений актуальной задачей является анализ взаимодействия нагнетательных и добывающих скважин. Математически данная задача сводится к задаче идентификации. В данной статье рассматривается задача идентификации параметров многомерной динамической системы, описывающей взаимодействие нагнетательных и добывающих скважин. Исследованы существующие методы идентификации параметров динамической системы. Предлагается применение метода обобщенного настраиваемого объекта измерения (ОНОИ) для решения поставленной задачи. В среде программирования Matlab реализованы алгоритм ОНОИ, алгоритм предсказания ошибки (Pem) и алгоритм, основанный на анализе подпространств (N4sid). Алгоритмы протестированы на примере восстановления параметров многомерной динамической системы при нулевых и ненулевых начальных условиях, без учета шумов и с учетом шумов в каналах измерения и управления. Проведен сравнительный анализ алгоритмов, показавший, что при наличии шумов в каналах измерения и управления метод ОНОИ является наиболее эффективным для решения поставленной задачи. К методу ОНОИ применен bootstrap-анализ, позволяющий исследовать устойчивость построенной модели к изменениям в выборке и получить на базе имеющейся выборки множество моделей. Проведенное исследование показало, что метод ОНОИ с применением bootstrap-анализа превосходит по точности идентификации обычный ОНОИ. В дальнейшем планируется применить алгоритм ОНОИ для реальных данных и на основе этого провести анализ связности нагнетательных и добывающих скважин, а

также разработать алгоритм, позволяющий идентифицировать нестационарные динамические системы.

**Key words:** system identification, connectivity of injection and production wells, state-space model, method of generalized adjusted object of measurement, prediction error method, subspace method of identification, bootstrap analysis.

**Ключевые слова:** идентификация систем, связность нагнетательных и добывающих скважин, модель в пространстве состояний, метод обобщенного настраиваемого объекта измерения (ОНОИ), алгоритм предсказания ошибки, алгоритм на основе анализа подпространств, bootstrap-анализ.

## Introduction

Reservoir pressure maintenance by water injection is necessary for effective oil production [1]. Water flooding is realized through systems of injection wells. So water in reservoir is distributed irregularly. This can reduce water injection efficiency. So the purpose of this work is researching of injection and production wells interaction.

## Problem formulation

Consider wells system which consists of  $m$  injection wells and  $r$  production wells. Assume that we know well flow measurements. It is necessary to assess injection wells influence on production wells. This is the problem of identification – building mathematical models of dynamical systems from measured data [2, 3].

We can take system of  $n^{\text{th}}$  order linear differential equations that describes state-space model [4]:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ Y(t) = CX(t) + DU(t), \end{cases} \quad (1)$$

where model inputs – injection well flow measurements, model outputs – production well flow measurements:

$$U(t) = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_m(t) \end{bmatrix}, Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_r(t) \end{bmatrix},$$

where  $U_i(t)$  – flow of  $i^{\text{th}}$  injection well at time  $t$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $Y_j(t)$  – flow of  $j^{\text{th}}$  production well at time  $t$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ ,  $X(t)$  – state vector.

Thus we obtain the following parametric identification problem [5]. Let measurements of the input signal  $U$  at time  $t$ , measurements of the output signal  $Y$  at time  $t$  be given. It is necessary to find system parameters  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  so that  $\|Y - \hat{Y}\| \rightarrow \min$ , where  $\hat{Y}$  – output calculated values of system (1), if we replace  $A, B, C, D$  by  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ .

### The method of generalized adjusted object of measurement (GAOM)

Consider the method GAOM for solving parametric identification problem. The advantage of this method is a linear dependence of adjustable parameters for error. Consider the algorithm of solving identification problem by this method for  $r = 1$  [6]:

1) Let the initial state vector is zero. Introduce the notation  $s = \frac{d}{dt}$  – differential operator. Find  $X(t)$  from the first equation of system (1) and put it in the second equation of system (1). So we obtain for  $Y(t)$ :

$$Y(t) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(t). \quad (2)$$

$C(sI - A)^{-1}B + D$  can be reduced to the form  $\sum_{i=1}^m \frac{b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}$ .

If we combine this with (2) and transform, we get:

$$\begin{aligned} & (s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)Y(t) \\ &= \sum_{i=1}^m (b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i})U_i(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Divide both sides of equation (3) by the polynomial of  $n^{\text{th}}$  degree  $P(s)$  with roots  $-\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_n$ .

So we have the following system of equations:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha_1}{s + \gamma_1} + \frac{\alpha_2}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s + \gamma_n} \right) Y(t) + Y(t) = \\ & = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\beta_{0i}}{s + \gamma_1} + \frac{\beta_{1i}}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\beta_{(n-1)i}}{s + \gamma_n} \right) U_i(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Introduce the notation:

$$g_j(t) = \frac{Y(t)}{s + \gamma_j}, f_{ji}(t) = \frac{U_i(t)}{s + \gamma_j}, j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Substituting (5) in (4), we get:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{(j-1)i} f_{ji}(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(t). \quad (6)$$

Unknown coefficients  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ ,  $B = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{11} & \dots & \beta_{(n-1)1} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \dots & \beta_{(n-1)2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{0m} & \beta_{1m} & \dots & \beta_{(n-1)m} \end{bmatrix}$  are

determined from the system (6) by the least square method. Then we can find coefficients of system (3)

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_{01}, b_{11}, \dots, b_{(n-1)1}, b_{02}, b_{12}, \dots, b_{(n-1)2}, b_{0m}, b_{1m}, \dots, b_{(n-1)m}.$$

Then we obtain observable canonical representation of matrix  $A, B, C, D$  of state-space model[4]:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \\ D &= 0, B = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,m} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,m} \end{bmatrix}, \text{ где } \beta_{1,l} = b_{0l}, \beta_{i,l} = b_{(i-1)l} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,l} a_{i-j}, \\ & l = 1, 2, \dots, m, i = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

2) Let the initial state vector is non-zero. Introduce the notation:

$$X^*(t) = X(t) - X_0. \quad (8)$$

We can obtain for  $X(t)$ :

$$X(t) = X^*(t) + X_0. \quad (9)$$

Substitute (9) in (2) and find  $Y(t)$ :

$$Y(t) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(t) + C((sI - A)^{-1}AX_0 + X_0). \quad (10)$$

Transform (10):

$$Y(t) = \sum_{i=1}^m \frac{b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} U_i(t) + \frac{c_0s^n + c_1s^{n-1} + \dots + c_{n-1}s}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} 1(t), \quad (11)$$

where  $1(t)=1$  for any  $t$ .

By (11), we have:

$$\begin{aligned} (s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)Y(t) = \\ \sum_{i=1}^m (b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i})U_i(t) + (c_0s^n + \\ + c_1s^{n-1} + \dots + c_{n-1}s)1(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Divide both sides of equation (12) by the polynomial of  $n^{\text{th}}$  degree  $P(s)$  with roots  $-\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_n$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha_1}{s + \gamma_1} + \frac{\alpha_2}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s + \gamma_n} \right) Y(t) + Y(t) \\ = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\beta_{0i}}{s + \gamma_1} + \frac{\beta_{1i}}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\beta_{(n-1)i}}{s + \gamma_n} \right) U_i(t) + \\ + \left( \frac{\zeta_0}{s + \gamma_1} + \frac{\zeta_1}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\zeta_{n-1}}{s + \gamma_n} \right) s1(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Introduce the notation:

$$w_j(t) = \frac{s}{s + \gamma_j} 1(t), j = 1, \dots, n, \quad (14)$$

and the notation (5).

Substituting (5), (14) in (13), we get:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{(j-1)i} f_{ji}(t) + \sum_{i=1}^n (\zeta_{(i-1)} w_i(t) - \alpha_i g_i(t)). \quad (15)$$

From (15) by the least square method we find  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ ,

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{11} & \dots & \beta_{(n-1)1} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \dots & \beta_{(n-1)2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{0m} & \beta_{1m} & \dots & \beta_{(n-1)m} \end{bmatrix}, Z = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}].$$

So we can find coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,

$$b_{01}, b_{11}, \dots, b_{(n-1)1}, b_{02}, b_{12}, \dots, b_{(n-1)2}, b_{0m}, b_{1m}, \dots, b_{(n-1)m}, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}.$$

Transform equations (11):

$$Y(t) = \sum_{i=1}^m \frac{b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} U_i(t) + \frac{q_0s^{n-1} + q_1s^{n-2} + \dots + q_{n-1}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} \cdot 1(t) + k \cdot 1(t). \quad (16)$$

Obtain  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$  и  $k$  from (16) by the method of undetermined coefficients using  $a_1, a_2, \dots, a_n, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ .

For the first  $(m+1)$  terms of system equation (16) obtain observable canonical representation of matrix  $A, B, C, D_1$  by formulas [4]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$D_1 = 0, B = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,(m+1)} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,(m+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,(m+1)} \end{bmatrix}, \text{ где } \beta_{1,l} = b_{0l},$$

$$\beta_{i,l} = b_{(i-1)l} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,l} a_{i-j}, \beta_{1,(m+1)} = q_0,$$

$$\beta_{i,(m+1)} = q_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,(m+1)} a_{i-j},$$

$$l = 1, 2, \dots, m, i = 2, 3, \dots, n. \quad (17)$$

Denote by  $B_1$  the matrix  $B$  without last column, by  $B_2$  – last column of  $B$ .

Consider the system (1).

When initial conditions are non-zero it can be represented in this way:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B \begin{bmatrix} U(t) \\ 1(t) \end{bmatrix} = AX(t) + B_1U(t) + B_21(t), \\ Y(t) = CX(t) + D \begin{bmatrix} U(t) \\ 1(t) \end{bmatrix} = CX(t) + D_1U(t) + D_21(t). \end{cases} \quad (18)$$

Let  $X^{**}(t) = X(t) + X_0$ . Then

$$X(t) = X^{**}(t) - X_0. \quad (19)$$

Substituting (9), (19) in (18), we get the following system:

$$\begin{cases} \dot{X}^{**}(t) = AX^{**}(t) + B_1U(t), \\ Y(t) = CX^{**}(t) + D_1U(t), \\ X_0 = A^{-1}B_21(t), \end{cases}$$

where  $A, B_1, B_2, C, D_1$  are obtained from (17)-(18).

Consider GAOM for multidimensional system ( $r \neq 1$ ).

For every model output  $y_j$  find  $A_j, B_j, C_j, D_j, X_{0j}$  ( $j = 1, \dots, r$ ).

$$\begin{cases} \dot{X}_j(t) = A_jX_j(t) + B_jU(t), \\ y_j(t) = C_jX_j(t) + D_jU(t), \\ X_j(t_0) = X_{0j}. \end{cases}$$

We get the equation for model output vector  $\hat{Y}_j$ :

$$\hat{Y}_j(t) = C_{Fj}X_j(t) + D_{Fj}U(t). \quad (20)$$

Introduce the notations  $A_{Fj} = [C_{Fj}D_{Fj}]$ ,  $W_j(t) = [X_j(t)U(t)]$  and substitute in (20). So we have:

$$\hat{Y}_j(t) = A_{Fj}W_j(t). \quad (21)$$

$A_{Fj}$  is founded by formula:

$$A_{Fj} = W_j^{-1}(t)\hat{Y}_j(t). \quad (22)$$

Thus we obtain  $r$  variants of parameters for system with  $r$  outputs:



$$\begin{cases} \dot{X}_j(t) = A_j X_j(t) + B_j U(t), \\ \hat{Y}_j(t) = C_{Fj} X_j(t) + D_{Fj} U(t), \\ X_j(t_0) = X_{0j}. \end{cases}$$

Then we choose the best model from  $r$  variants according to the following criterion:

$$Err \rightarrow \min,$$

$$\text{where } Err = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{2}}, N - \text{number of measurements.} \quad (23)$$

### Bootstrap-analysis for improving the quality of identification

Existing methods of identification allow obtaining the only models. But in the presence of noise assessment of system parameters sometimes shifts. This problem can be solved by using the bootstrap analysis. It allows obtaining a set of models and shows whether models are resistant to changes in the sample. It is applied to obtaining of a generalized model. For each model choose equations randomly from system (15). Solve these systems of equations by the least square method. Obtain models for each system. So instead of the only model we get a set of models (Figure 1).

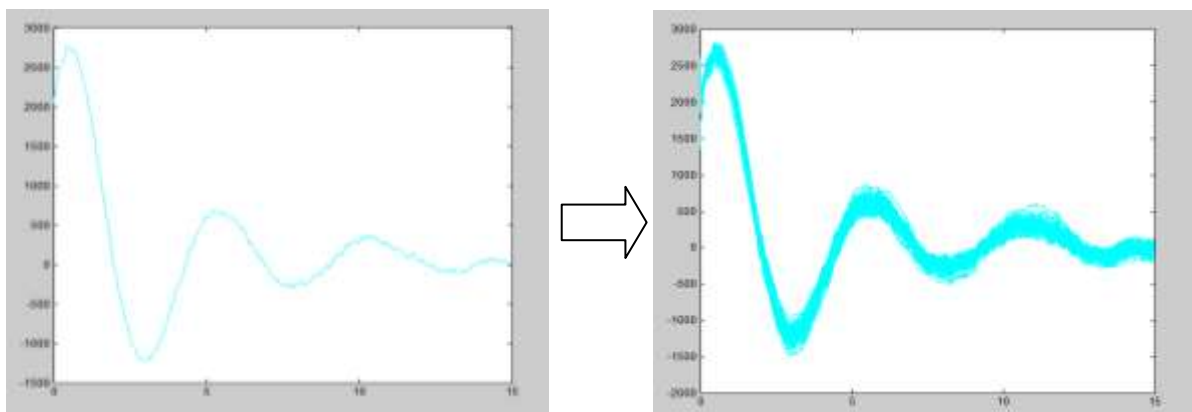


Figure 1. Results of bootstrap analysis application

On the figure 1 on the left graphic there is a basic model obtained from all equations of system (15), on the right graphic there is ensemble of models obtained from system equations consisted of equations of system (15) chosen randomly. The best model is chosen from the set of bootstrap according to criterion (23).

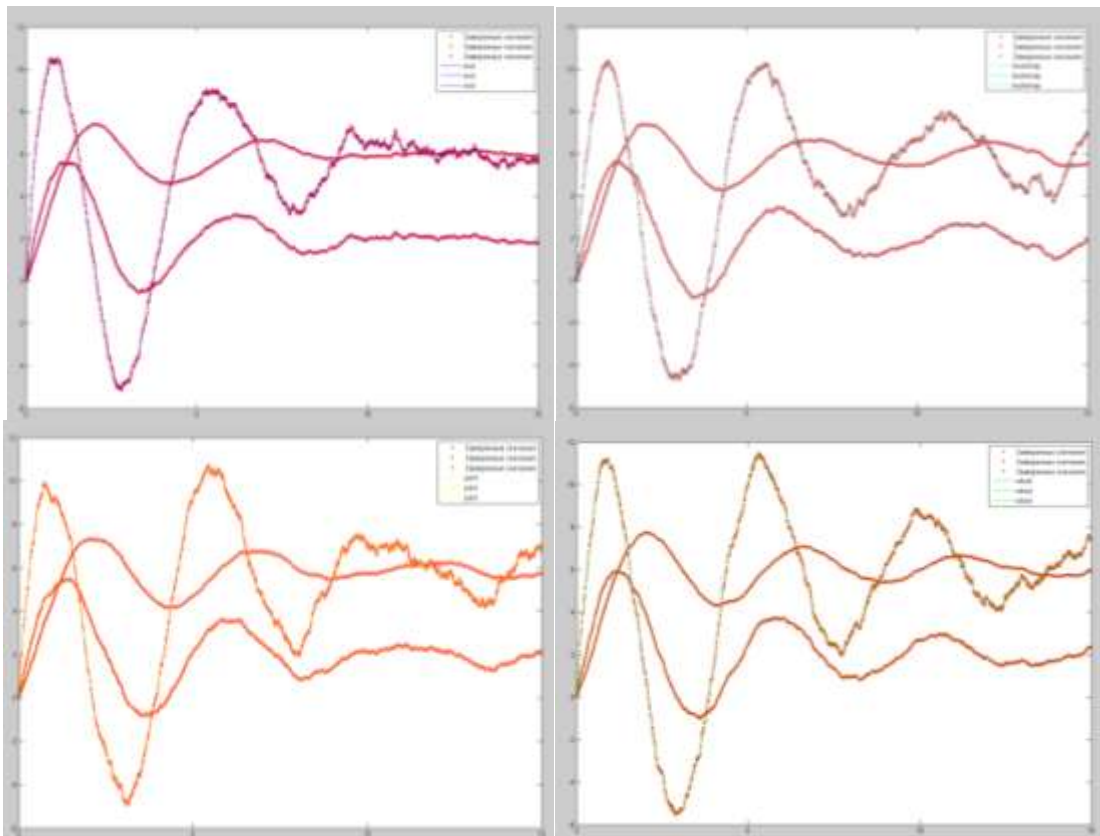
### **Experimental results**

The method of generalized adjusted object of measurement (GAOM) is realized in Matlab [7] and tested for the case of 4<sup>th</sup> order dynamic system with 4 inputs and 3 outputs, 1500 measurements. As well this system has been identified by prediction error method (PEM) where parameters are searched by gradient method and subspace method of identification (N4sid) [2] to compare the results. These algorithms are realized in Matlab by functions pem and n4sid respectively. The system is identified for the case of zero initial conditions, non-zero initial conditions, in the absence and presence of noise in measurement and control channels.

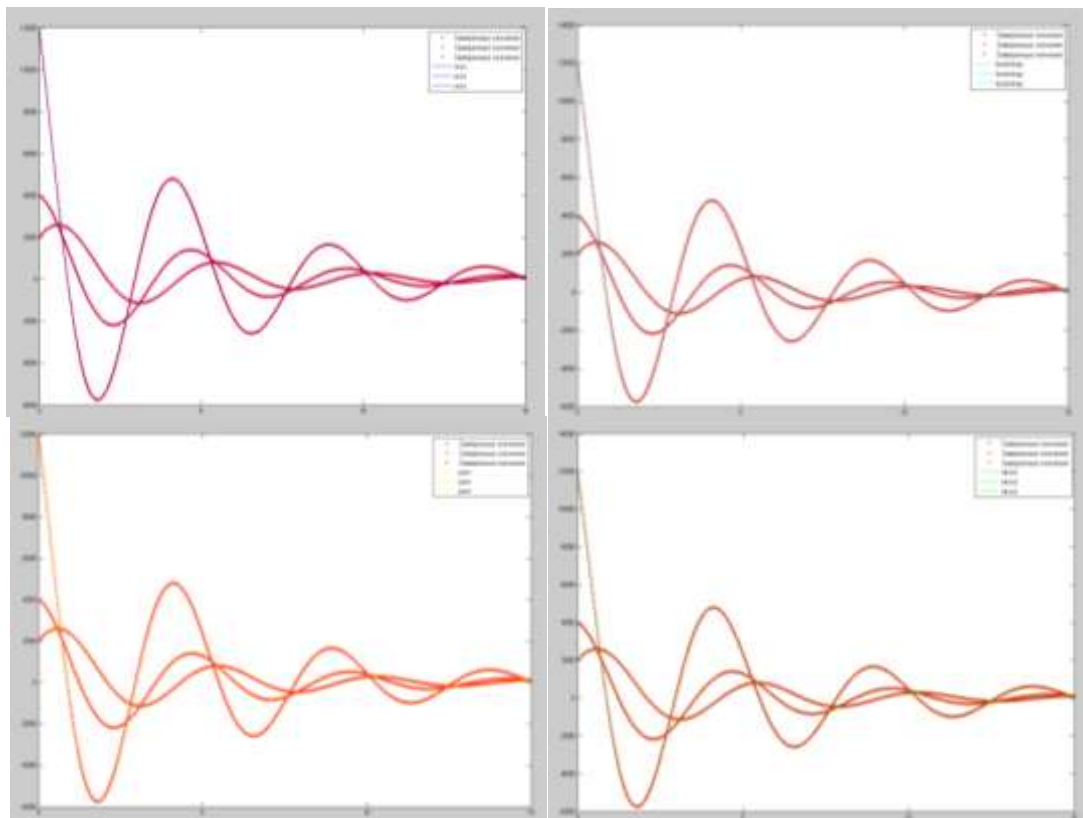
Noise variance is 0.2 of signal variance.

*Err*, criterion of identification quality, and *Std*, ratio of error standard deviation ( $Y - \hat{Y}$ ) to standard deviation  $Y$ , are calculated for each algorithm.

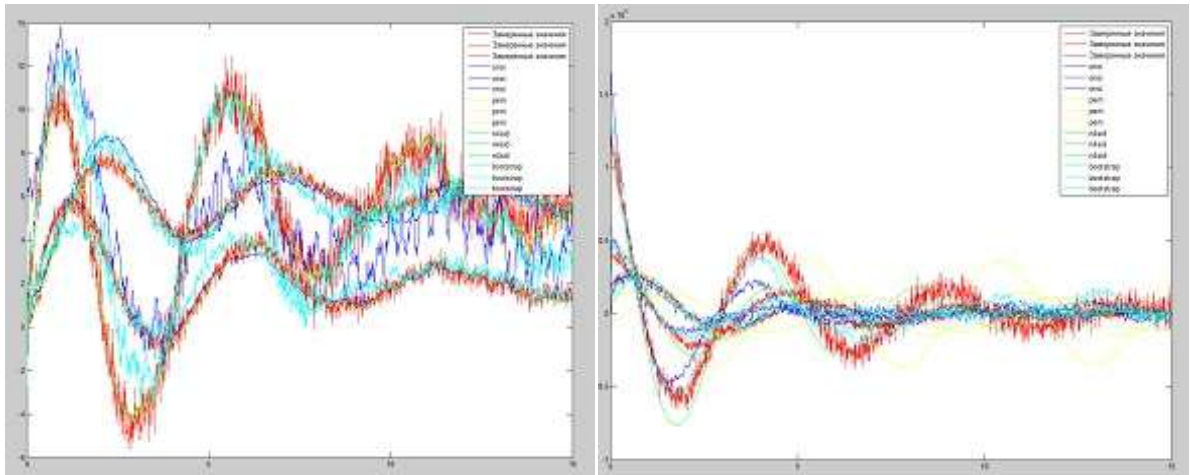
The results of identification for system (1) are represented on the figures 2-15.



Figures 2-5. The results of system identification by methods GAOM, GAOM with bootstrap analysis, Pem, N4sid, zero initial conditions, absence of noise



Figures 6-9. The results of system identification by methods GAOM, GAOM with bootstrap analysis, Pem, N4sid, non-zero initial conditions, absence of noise



Figures 10-11. The results of system identification, zero initial conditions, non-zero initial conditions, presence of noise

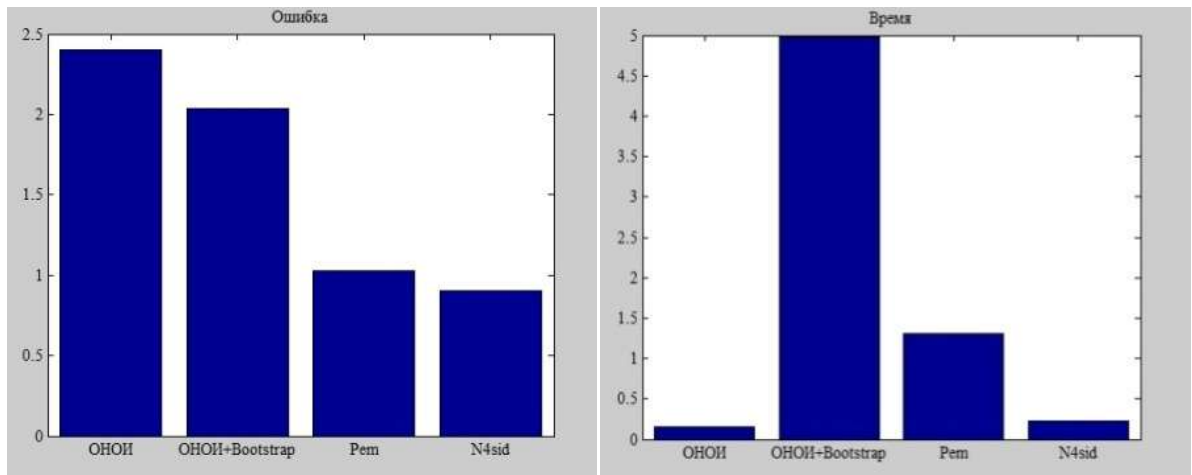


Figure 12. Error and Time, zero initial conditions, presence of noise

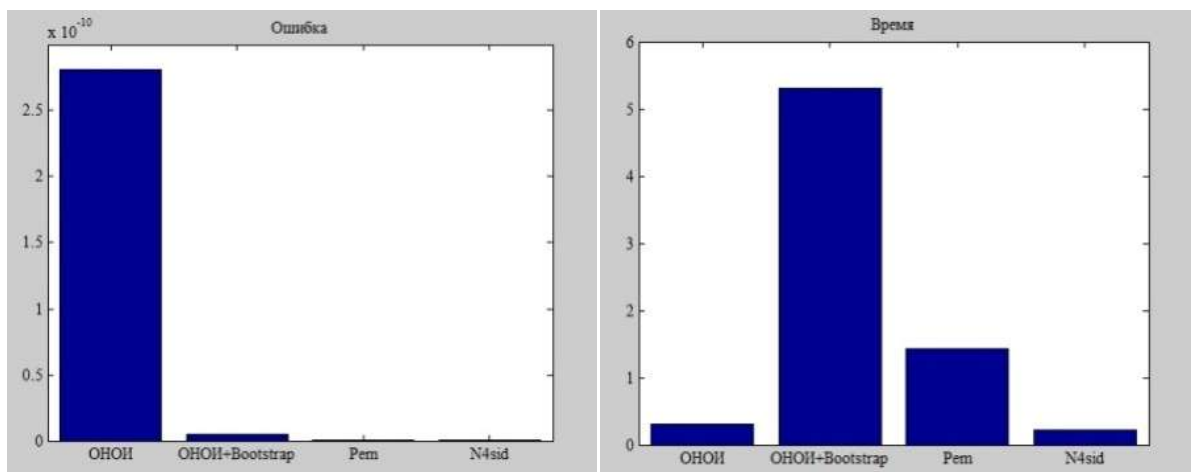


Figure 13. Error and Time, zero initial conditions, absence of noise

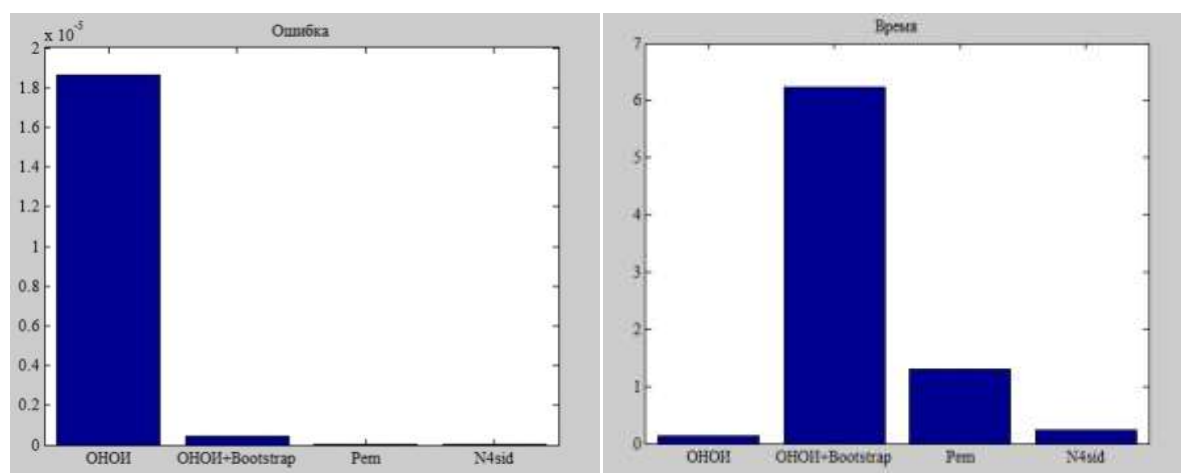


Figure 14. Error and Time, non-zero initial conditions, absence of noise

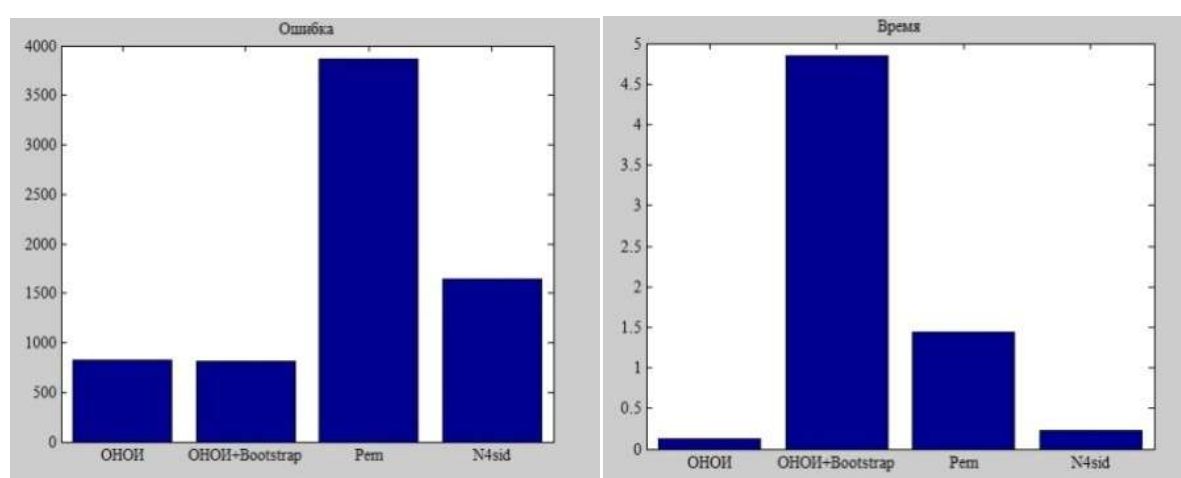


Figure 15. Error and Time, non-zero initial conditions, presence of noise

According to obtained results the algorithm GAOM with bootstrap analysis allows obtaining more qualitative models than methods Pem and N4sid in the presence of noise in measurement and control channels.

## Conclusions

So in this work the problem of parametric multidimensional dynamic system identification is considered. Existing identification methods are considered. The algorithm GAOM is realized in Matlab and tested for parametric multidimensional dynamic system identification. According to obtained results GAOM allows obtaining more qualitative models in less time than methods Pem and N4sid in the presence of noise. And GAOM with bootstrap analysis surpass GAOM in the presence of noise with non-zero initial conditions. It is planned to use the proposed method for parametric identification of wells connectivity system and develop the algorithm which allows identifying the non-stationary dynamical systems. It is planned to use the proposed method for parametric identification of wells connectivity system and develop the algorithm which allows identifying the non-stationary dynamical systems.

## Введение

При разработке нефтяных месторождений для эффективной добычи нефти необходимо поддерживать пластовое давление закачкой в пласт воды [1]. Воздействие на пласт осуществляется через систему нагнетательных скважин, при этом вода в пласте распределяется неравномерно, что может снизить эффективность заводнения. Поэтому актуальной задачей является анализ взаимодействия нагнетательных и добывающих скважин, что предлагается сделать на основе математического моделирования рассматриваемого процесса.

## Постановка задачи

Рассмотрим систему скважин, состоящую из  $m$  нагнетательных скважин и  $r$  добывающих. Пусть известны замеры дебитов скважин. Нужно количественно оценить степень воздействия нагнетательных скважин на добывающие.

Математически данная задача сводится к задаче идентификации – построения математической модели системы и восстановления ее параметров по данным наблюдений за ее поведением [2,3].

В качестве модели можно взять систему дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка, описывающую линейную динамическую систему в пространстве состояний [4]:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ Y(t) = CX(t) + DU(t), \end{cases} \quad (1)$$

где входные сигналы модели – дебиты нагнетательных скважин, выходные – дебиты добывающих скважин:

$$U(t) = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_m(t) \end{bmatrix}, Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_r(t) \end{bmatrix},$$

где  $U_i(t)$  – дебит  $i$ -ой нагнетательной скважины в момент времени  $t$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $Y_j(t)$  – дебит  $j$ -ой добывающей скважины в момент времени  $t$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ ,  $X(t)$  – вектор состояния системы.

Т.о., получаем следующую задачу параметрической идентификации [5]. Даны замеры входного сигнала  $U$  в моменты времени  $t$ , замеры выходного сигнала  $Y$  в моменты времени  $t$ . Нужно подобрать значения параметров системы  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  так, чтобы  $\|Y - \hat{Y}\| \rightarrow \min$ , где  $\hat{Y}$  – расчетные значения выходного сигнала системы (1), при подстановке в систему вместо матриц  $A, B, C, D$  матриц  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ .

### Решение задачи методом обобщенного настраиваемого объекта измерения (ОНОИ)

Рассмотрим решение поставленной задачи методом ОНОИ. Преимущество этого метода заключается в том, что ошибка является линейной функцией настраиваемых параметров. Рассмотрим алгоритм решения задачи идентификации системы методом ОНОИ для  $r = 1$  [6]:

1) Пусть начальные условия системы нулевые. Введем замену  $s = \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования. Выразим  $X(t)$  из первого уравнения системы (1) и подставим полученное выражение во второе уравнение системы (1). Получим выражение для  $Y(t)$ :

$$Y(t) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(t). \quad (2)$$

Оператор  $C(sI - A)^{-1}B + D$  можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^m \frac{b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Подставив в систему уравнений (2) и преобразовав, получим:

$$(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)Y(t) = \sum_{i=1}^m (b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i})U_i(t). \quad (3)$$

Разделим обе части уравнения (3) на полином  $n$ -ой степени  $P(s)$  с корнями  $-\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_n$ .



Получится следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha_1}{s + \gamma_1} + \frac{\alpha_2}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s + \gamma_n} \right) Y(t) + Y(t) = \\ = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\beta_{0i}}{s + \gamma_1} + \frac{\beta_{1i}}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\beta_{(n-1)i}}{s + \gamma_n} \right) U_i(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Введем замены:

$$g_j(t) = \frac{Y(t)}{s + \gamma_j}, f_{ji}(t) = \frac{U_i(t)}{s + \gamma_j}, j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Тогда систему (4) можно переписать в виде:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{(j-1)i} f_{ji}(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(t). \quad (6)$$

Неизвестные коэффициенты  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ ,  $B = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{11} & \dots & \beta_{(n-1)1} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \dots & \beta_{(n-1)2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{0m} & \beta_{1m} & \dots & \beta_{(n-1)m} \end{bmatrix}$  находятся из системы (6) методом наименьших

квадратов. Зная эти коэффициенты, находим коэффициенты системы (3)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b_{01}, b_{11}, \dots, b_{(n-1)1}, b_{02}, b_{12}, \dots, b_{(n-1)2}, b_{0m}, b_{1m}, \dots, b_{(n-1)m}$ .

Зная эти коэффициенты, можно получить наблюдаемое каноническое представление матриц модели в пространстве состояний  $A, B, C, D$  по формулам [4]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n - a_{n-1} - a_{n-2} - \dots - a_2 - a_1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$D = 0, B = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,m} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,m} \end{bmatrix}, \text{ где } \beta_{1,l} = b_{0l},$$

$$\beta_{i,l} = b_{(i-1)l} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,l} a_{i-j},$$

$$l = 1, 2, \dots, m, i = 2, 3, \dots, n. \quad (7)$$

2) Рассмотрим систему с ненулевыми начальными условиями. Введем обозначение:

$$X^*(t) = X(t) - X_0. \quad (8)$$

Из (8) выразим  $X(t)$ :

$$X(t) = X^*(t) + X_0. \quad (9)$$

Подставим (9) в (2) и выразим  $Y(t)$ :

$$Y(t) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(t) + C((sI - A)^{-1}AX_0 + X_0). \quad (10)$$

Систему (10) можно привести к виду:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^m \frac{b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} U_i(t) + \frac{c_0s^n + c_1s^{n-1} + \dots + c_{n-1}s}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} 1(t), \quad (11)$$

где  $1(t)$  – единичный входной сигнал.

Преобразуем (11):

$$\begin{aligned} (s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)Y(t) = \\ \sum_{i=1}^m (b_{0i}s^{n-1} + b_{1i}s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i})U_i(t) + (c_0s^n + \\ + c_1s^{n-1} + \dots + c_{n-1}s)1(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Разделим обе части уравнений (12) на полином  $P(s)$  с корнями  $-\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_n$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha_1}{s + \gamma_1} + \frac{\alpha_2}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s + \gamma_n} \right) Y(t) + Y(t) \\ = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\beta_{0i}}{s + \gamma_1} + \frac{\beta_{1i}}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\beta_{(n-1)i}}{s + \gamma_n} \right) U_i(t) + \\ + \left( \frac{\zeta_0}{s + \gamma_1} + \frac{\zeta_1}{s + \gamma_2} + \dots + \frac{\zeta_{n-1}}{s + \gamma_n} \right) s1(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Введем замены:

$$w_j(t) = \frac{s}{s + \gamma_j} 1(t), j = 1, \dots, n, \quad (14)$$

и замены (5).

Тогда систему (13) можно переписать в виде:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{(j-1)i} f_{ji}(t) + \sum_{i=1}^n (\zeta_{(i-1)} w_i(t) - \alpha_i g_i(t)). \quad (15)$$

Из системы уравнений (15) методом наименьших квадратов находим

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n], B = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{11} & \dots & \beta_{(n-1)1} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \dots & \beta_{(n-1)2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{0m} & \beta_{1m} & \dots & \beta_{(n-1)m} \end{bmatrix}, Z = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}].$$

Зная  $A, B, Z$ , находим коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_{01}, b_{11}, \dots, b_{(n-1)1}, b_{02}, b_{12}, \dots, b_{(n-1)2}, b_{0m}, b_{1m}, \dots, b_{(n-1)m}, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ .

Уравнения (11) можно привести к виду:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^m \frac{b_{0i} s^{n-1} + b_{1i} s^{n-2} + \dots + b_{(n-1)i}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} U_i(t) + \frac{q_0 s^{n-1} + q_1 s^{n-2} + \dots + q_{n-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \cdot 1(t) + k \cdot 1(t). \quad (16)$$

Зная  $a_1, a_2, \dots, a_n, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ , из (16) методом неопределенных коэффициентов находим  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$  и  $k$ .

Для первых  $(m+1)$  слагаемых уравнений системы (16) получаем наблюдаемое каноническое представление матриц  $A, B, C, D_1$  по формулам [4]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$D_1 = 0, B = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,(m+1)} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,(m+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,(m+1)} \end{bmatrix}, \text{ где } \beta_{1,l} = b_{0l},$$

$$\beta_{i,l} = b_{(i-1)l} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,l} a_{i-j}, \beta_{1,(m+1)} = q_0,$$

$$\beta_{i,(m+1)} = q_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{j,(m+1)} a_{i-j},$$

$$l = 1, 2, \dots, m, i = 2, 3, \dots, n. \quad (17)$$

Обозначим  $B_1$  матрицу  $B$  без последнего столбца,  $B_2$  – последний столбец матрицы  $B$ .

Рассмотрим систему (1).

При ненулевых начальных условиях ее можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B \begin{bmatrix} U(t) \\ 1(t) \end{bmatrix} = AX(t) + B_1U(t) + B_21(t), \\ Y(t) = CX(t) + D \begin{bmatrix} U(t) \\ 1(t) \end{bmatrix} = CX(t) + D_1U(t) + D_21(t). \end{cases} \quad (18)$$

Пусть  $X^{**}(t) = X(t) + X_0$ . Тогда

$$X(t) = X^{**}(t) - X_0. \quad (19)$$

Подставив замены (9), (19) в (18) и преобразовав, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{X}^{**}(t) = AX^{**}(t) + B_1U(t), \\ Y(t) = CX^{**}(t) + D_1U(t), \\ X_0 = A^{-1}B_21(t), \end{cases}$$

где матрицы  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$ ,  $D_1$  рассчитываются по формулам (17)-(18).

Рассмотрим алгоритм ОНОИ для многомерной системы ( $r \neq 1$ ).

Для каждого выхода модели  $y_j$  найдем  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$ ,  $X_{0j}$  ( $j = 1, \dots, r$ ).

$$\begin{cases} \dot{X}_j(t) = A_jX_j(t) + B_jU(t), \\ y_j(t) = C_jX_j(t) + D_jU(t), \\ X_j(t_0) = X_{0j}. \end{cases}$$

Для векторного выхода модели  $\hat{Y}_j$  получаем уравнение:

$$\hat{Y}_j(t) = C_{Fj}X_j(t) + D_{Fj}U(t). \quad (20)$$

В уравнении (20)  $C_{Fj}$  и  $D_{Fj}$  неизвестны.

Введем замены  $A_{Fj} = [C_{Fj} \ D_{Fj}]$ ,  $W_j(t) = [X_j(t) \ U(t)]$  и подставим в уравнение (20). Получим следующее уравнение.

$$\hat{Y}_j(t) = A_{Fj}W_j(t). \quad (21)$$

Матрицу  $A_{Fj}$  находим по формуле:

$$A_{Fj} = W_j^{-1}(t)\widehat{Y}_j(t). \quad (22)$$

Т.о., получаем  $r$  вариантов параметров системы с  $r$  выходами:

$$\begin{cases} \dot{X}_j(t) = A_j X_j(t) + B_j U(t), \\ \widehat{Y}_j(t) = C_{Fj} X_j(t) + D_{Fj} U(t), \\ X_j(t_0) = X_{0j}. \end{cases}$$

Из  $r$  вариантов выбираем лучшую модель по следующему критерию:

$$Err \rightarrow \min, \text{ где } Err = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(Y_i - \widehat{Y}_i)^2}{2}}, N - \text{число замеров.} \quad (23)$$

### Повышение качества идентификации посредством Bootstrap-анализа

Существующие методы идентификации позволяют получить одну модель. Часто при наличии шумов происходит смещение в оценке параметров системы. Для улучшения качества идентификации можно провести bootstrap-анализ. Bootstrap-анализ позволяет получить множество моделей и показывает, насколько они устойчивы к изменениям в выборке. При составлении обобщенной модели применим bootstrap-анализ. Для каждой модели случайно выберем уравнения из системы уравнений (15). Решим полученные системы уравнений методом наименьших квадратов и для каждой получим свои модели. В результате применения bootstrap-метода получим не одну модель, а множество моделей (рисунок 1).

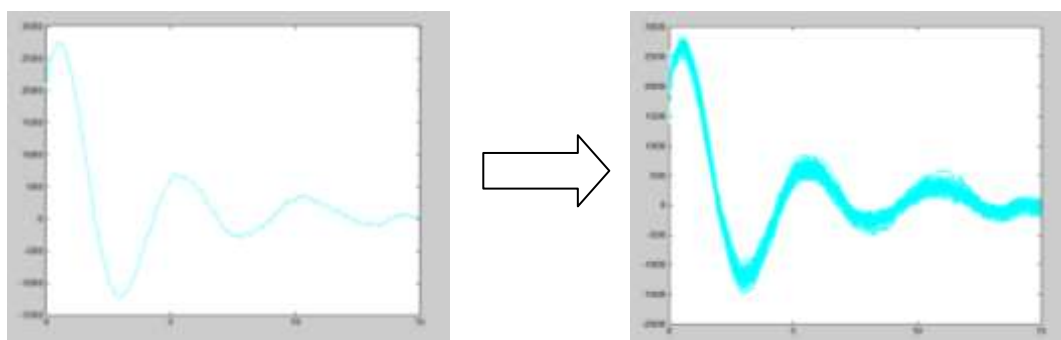


Рисунок 1. Результат применения bootstrap-анализа

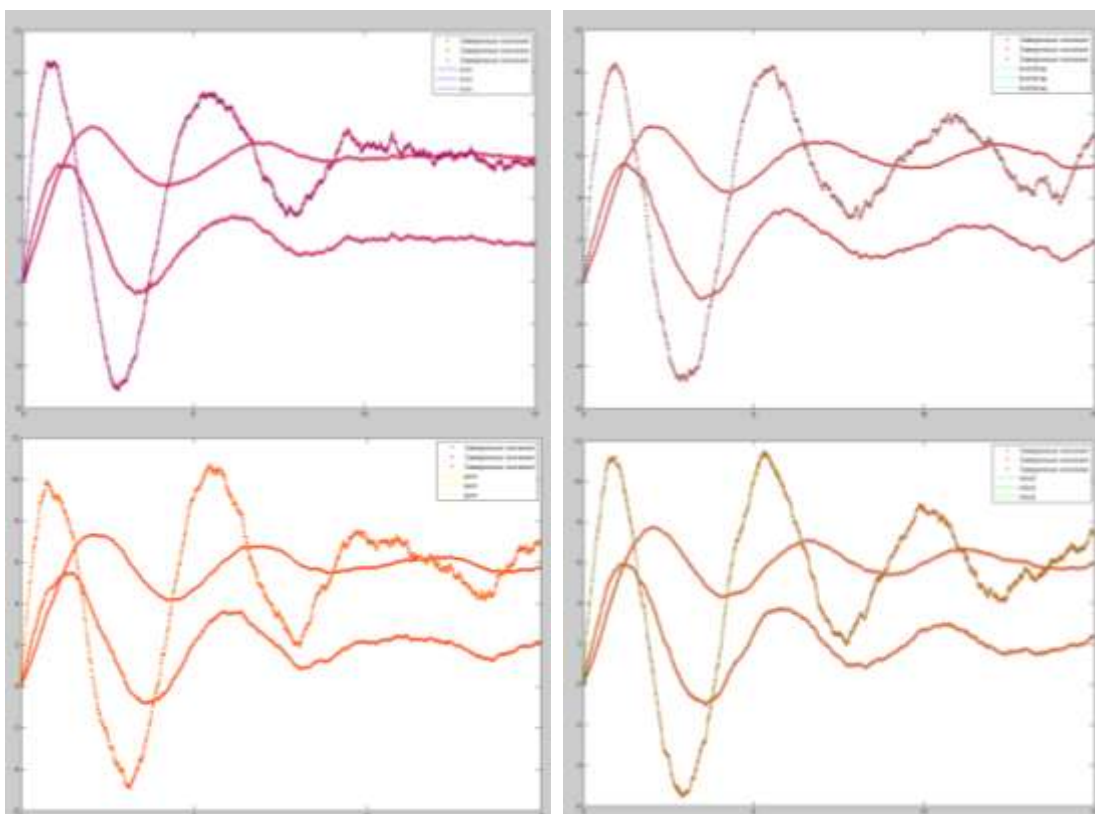
На рисунке 1 на левом графике представлена базовая модель, полученная с использованием всех уравнений системы уравнений (15), на правом графике – ансамбль моделей, полученных решением систем уравнений, состоящих из случайно выбранных уравнений системы (15). Из ансамбля моделей, полученных bootstrap-методом, выбирается лучшая по критерию (23).

### Результаты вычислительного эксперимента

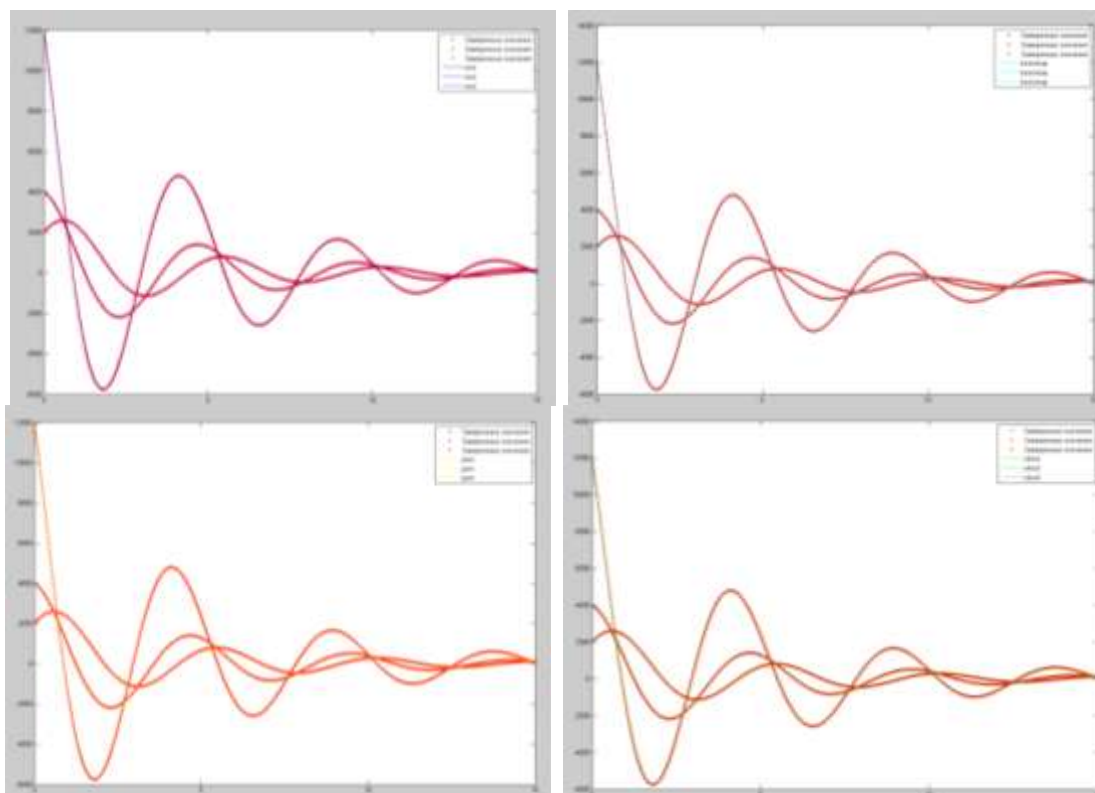
Метод обобщенного настраиваемого объекта измерения (ОНОИ) реализован в среде программирования Matlab [7] и протестирован на примере динамической системы 4-го порядка с 4 входами и 3 выходами, 1500 замеров. Также для сравнения результатов была проведена идентификация этой же системы методом предсказания ошибки Pem («prediction error method»), в котором параметры модели ищутся градиентным методом, и методом, основанном на анализе подпространств N4sid («subspace method of identification») [2]. В среде Matlab эти алгоритмы реализованы функциями pem и n4sid соответственно. Идентификация проводилась при нулевых начальных условиях, при ненулевых начальных условиях, без учета шума и с учетом шума в каналах измерения и управления. Дисперсия шума составляет 0,2 дисперсии сигнала.

Для каждого алгоритма рассчитаны  $Err$ , критерий качества идентификации, и  $Std$ , отношение стандартного отклонения ошибки  $(Y - \hat{Y})$  к стандартному отклонению  $Y$ , показывающее насколько соразмерны уровень ошибки и уровень сигнала.

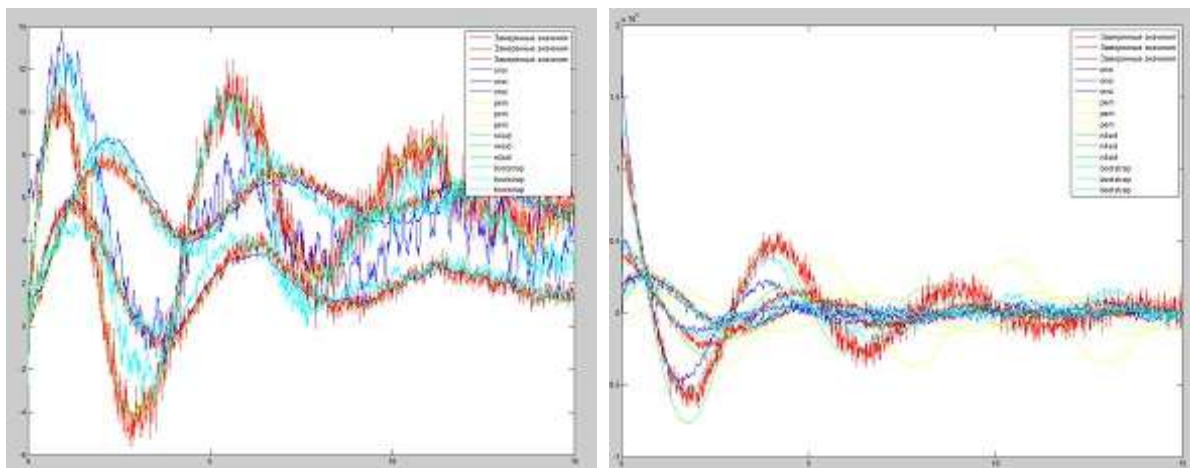
Результаты идентификации системы (1) представлены на рисунках 2-15.



Рисунки 2-5. Результаты идентификации системы методами ОНОИ, ОНОИ с применением bootstrap-анализа, Rem и N4sid при нулевых начальных условиях без учета шума



Рисунки 6-9. Результаты идентификации системы методами ОНОИ, ОНОИ с применением bootstrap-анализа, Rem и N4sid при ненулевых начальных условиях без учета шума



Рисунки 10-11. Результаты идентификации системы при нулевых и ненулевых начальных условиях с учетом шума

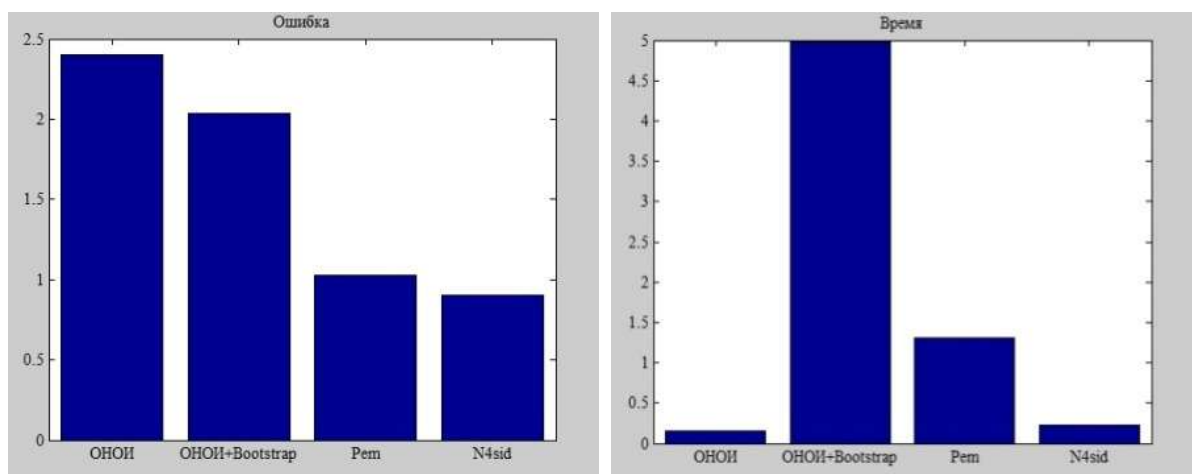


Рисунок 12. Ошибка и время при нулевых начальных условиях с учетом шумов

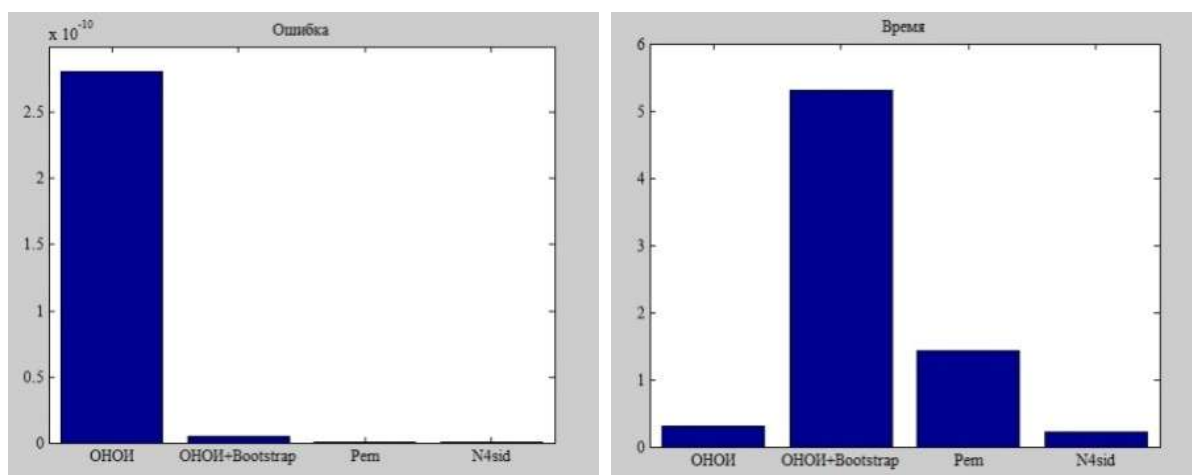


Рисунок 13. Ошибка и время при нулевых начальных условиях без учета шумов



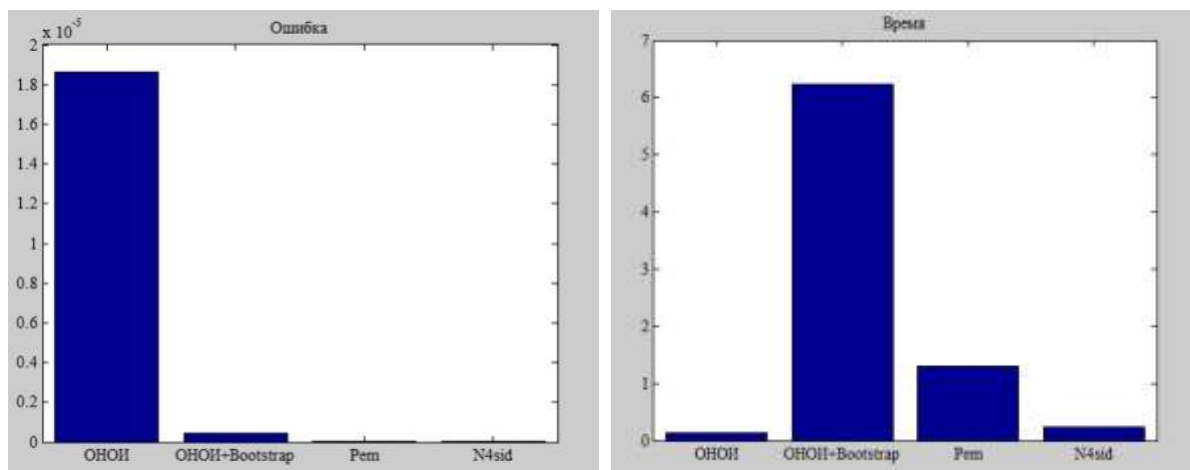


Рисунок 14. Ошибка и время при ненулевых начальных условиях без учета шумов

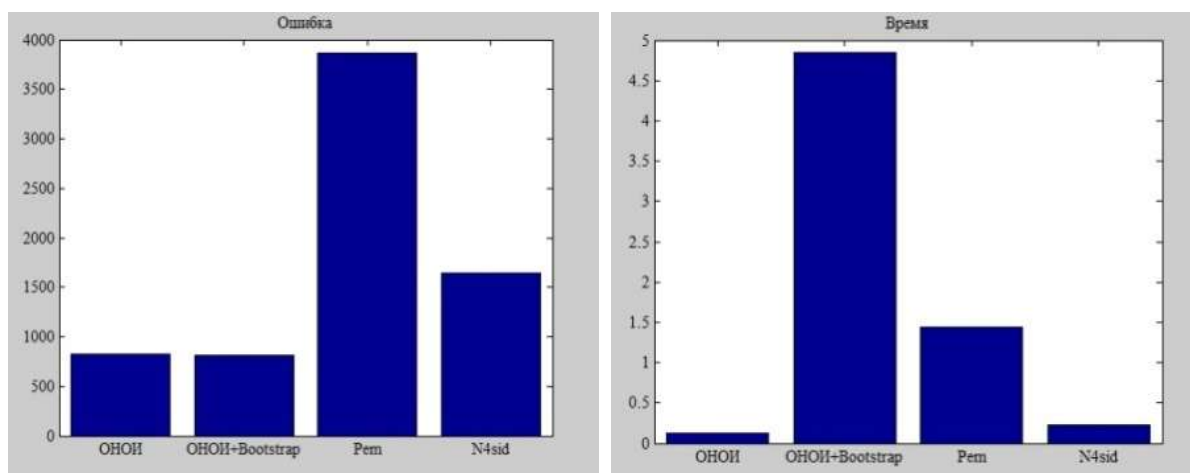


Рисунок 15. Ошибка и время при ненулевых начальных условиях с учетом шумов

Из рисунков 2-15 видно, что при наличии шумов в каналах измерения и управления алгоритм ОНОИ с применением bootstrap-метода превосходит алгоритмы Pem и N4sid по качеству модели.

## Выводы

Таким образом, в ходе работы рассмотрена задача идентификации параметров многомерной динамической системы. Исследованы существующие методы идентификации. В среде программирования Matlab реализован алгоритм ОНОИ и протестирован на примере идентификации параметров многомерной динамической системы. Проведенное исследование показало, что метод ОНОИ в условиях шумов превосходит

методы Pem и N4sid по качеству идентификации и по времени выполнения, а метод ОНОИ с применением bootstrap-анализа превосходит метод ОНОИ в условиях шумов при ненулевых начальных условиях. В дальнейшем планируется на основе метода ОНОИ разработать алгоритм, позволяющий идентифицировать нестационарные динамические системы.

## References

- 1 Kosarev V.E. Monitoring of oil and gas field development. Kazan': Kazan' State University. 2009. 145 p. [In Russian].
- 2 Ljung L. System identification: Theory for the User. Moscow: Nauka Publ. 1991. 432 p. [In Russian].
- 3 Jejkhoff P. Fundamentals of Identification Control Systems. Moscow: Mir Publ. 1975. 683 p. [In Russian].
- 4 Andrievskij B.R., Fradkov A.L. Selected chapters of control theory with examples in MATLAB. St. Petersburg: Nauka Publ. 2000. 475 p. [In Russian].
- 5 Katkov M.S., Azarov M.M. The parameter identification system of aerial vehicle dynamic model. // Proc. Congress-2000 "Fundamental problems of science and technics". St. Petersburg, 2008. №23. P.511-518 [In Russian].
- 6 Nadezhdin O.V., Zaminova A.R. The analysis of connectivity of injection and production wells dynamics // Large-scale Systems Control. Moscow: Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 2009. № 25. P. 35-47 [In Russian].
- 7 D'jakonov V.P., Kruglov V.V. MATLAB: An Analysis, Identification, and Modeling System. St. Petersburg: Piter Publ. 2001. 448 p. [In Russian].

## Список используемых источников

- 1 Косарев В.Е. Контроль за разработкой нефтяных и газовых месторождений: пособие для самостоятельного изучения для слушателей курсов повышения квалификации специальности «Геофизика». Казань: Казанский государственный университет, 2009. 145 с.

2 Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.

3 Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. М.: Мир. 1975. 683 с.

4 Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке Matlab. СПб.: Наука. 2000. 475 с.

5 Катков М.С., Азаров М.М. Система параметрической идентификации математической модели движения самолета // Конгресс-2000 "Фундаментальные проблемы естествознания и техники": сборник тр. СПб.: 2008. № 23. С.511-518.

6 Надеждин О.В., Заминова А.Р. Анализ связности динамики нагнетательных и добывающих скважин // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН, 2009. № 25. С. 35-47.

7 Дьяконов В.П., Круглов В.В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. СПб.: Питер, 2001. 448 с.

### **About the authors**

#### **Сведения об авторах**

V.L. Khashper, Master student of the Chair "Mathematical Modeling", FSBEI NPE "Bashkir State University", Ufa, the Russian Federation

Хашпер Б.Л., магистрант кафедры математического моделирования ФГБОУ ВПО БашГУ, г. Уфа, Российская Федерация

O.V. Nadezhdin, Candidate of Engineering Sciences, Chief Specialist of Analytical Department at LLC "BashNIPIneft", Ufa, Russian Federation

Надеждин О.В., канд. техн. наук, главный специалист аналитического отдела ООО «БашНИПИнефть», г. Уфа, Российская Федерация

D.V. Efimov, Chief of Analytical Department at LLC “BashNIPIneft”, Ufa,  
Russian Federation

Ефимов Д.В., начальник аналитического отдела  
ООО «БашНИПИнефть», г. Уфа, Российская Федерация

e-mail: bella\_anna\_tw@mail.ru