Корректировка кривой приземления трамплина (от стола отрыва до точки касания)

Зотов Алексей Николаевич

(Уфимский государственный нефтяной технический университет)

Постановка задачи

Согласно последним требованиям международных стандартов на проектирование и строительство трамплинов для прыжков на лыжах возникла необходимость корректировки одного из элементов строящегося в Октябрьском районе Уфы 120-метрового трамплина, а именно, кривой приземления от стола отрыва до точки начала приземления.

Задача была поставлена следующим образом. Необходимо вписать **КЛОТОИДУ** в две точки с заданными координатами **О** (0; 0) и **Р** (96.67; -54.5) (рис.1).

Одновременно, должны выполняться следующие условия: угол сопряжения (угол наклона касательной к горизонту) для точки **О** - 6°; угол сопряжения для точки **Р** - 36°. Длина данного участка клотоиды также задана: Wp = 111.5 м.

Решение

Клотоида описывается следующими уравнениями в параметрической форме [1]:

$$x = a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos(\pi \cdot u^2/2)du$$

$$y = a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin(\pi \cdot u^2/2)du \qquad (1)$$

Клотоида проходит через начало координат, причем величина, обратная радиусу кривизны (сама кривизна), в каждой точке М кривой пропорциональна длине дуги кривой $S = O_1M$ (рис. 2); т. е. $1/R = Sa^2$ (множитель пропорциональности $1/a^2$). Уравнения заданы в параметрической форме, так как эти интегралы не выражаются через элементарные функции.

$$-\infty < t < +\infty;\ t = S/a\sqrt{\pi};\ S = O_1M;\ a > 0 \qquad (2)$$

Точка «O_1» - центр симметрии кривой (рис. 2).

Угол наклона касательной в произвольной точке определяется по следующей формуле [1]:

tg (= (dy/dt)/(dx/dt), тогда

$$tg\beta = tg(\pi \cdot t^2 / 2), \text{ или } \beta = (\pi \cdot t^2 / 2) \qquad (3)$$

Задача заключается в том, чтобы найти такие точки А и В клотоиды, чтобы участок между двумя этими точками можно было вписать в известные координаты (0;0 и 96.67;-54.5) при заданной длине этого участка (W_p =111.5 м). Кроме того, должно выполняться условие, что углы наклона касательных в этих точках должны быть равны 6 градусов для точки с координатами 0;0 и 36 градусов для точки с координатами 96.67;-54.5 (рис.1,2).

При исследовании этого вопроса было установлено, что невозможно найти такой участок клотоиды, изображенной на рис.2, чтобы выполнялись все перечисленные выше требования. Задача имеет решение, только, если поворачивать выбранный участок клотоиды. Оказалось, также, что решение существует в случае, когда точки А и В находятся с разных сторон от центра клотоиды O_1. Чтобы клотоиду, проходящую через точки А и В (рис.2) можно было вписать (с поворотом вокруг точки В) в точки О и Р (рис.1), необходимо, чтобы координаты этих точек удовлетворяли следующему уравнению (рис. 3):

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 96.67^2 + 54.5^2,$$

или с учетом (1)

$$a^2\pi\{[\int_{t_A}^{t_B} \cos(\pi u^2/2)du]^2 + [\int_{tA}^{t_B} \sin(\pi u^2/2)du]^2\} = 96.67^2 + 54.5^2 \qquad (4)$$

После поворота участка клотоиды вокруг точки В на необходимый угол точка А (рис. 2) совпадет с точкой Р (рис.1), а точка В станет точкой О.

Кроме того, что участок клотоиды впишется в заданные координаты, необходимо, чтобы его длина (Wp) была равна заданной. По условию заказчика Wp = 111.5 м.

Как выше было показано: длина участка клотоиды от ее центра O_1 до произвольной точки М (рис. 2) определяется по формуле (2): $S = O_1M = t \cdot a \cdot \sqrt{\pi}$. Тогда, длина участка АВ (рис. 2) будет определяться по следующей формуле:

$$S_{AB} = W_P = S_{OB} + S_{OA} \qquad (5)$$

$$W_P = a\sqrt{\pi}(t_B - t_A), \quad \text{откуда} \quad a = (\sqrt{\pi})^{-1} \cdot (W_P / (t_B - t_A))$$

Подставим это выражение в (4):

$$[\int_{t_A}^{t_B}\cos(\pi u^2/2)du]^2+[\int_{t_A}^{t_B}\sin(\pi u^2/2)du]^2=(96.67^2+54.5^2)\cdot(\frac{t_B-t_A}{W_P})^2 \qquad (6)$$

В этом уравнении, при заданной длине Wp, две неизвестные t_B и t_A. Если задать какое-нибудь значение t_A, то, численно, можно получить значение t_B.

Остается выполнение последнего требования об углах сопряжения после поворота участка клотоиды вокруг точки B. Поворот должен осуществляться на такой угол α, чтобы точка A попала в заданную координату (точку P на рис.1, при этом точка B становится началом координат O). Это возможно, только, если значение α будет следующим (рис.3):

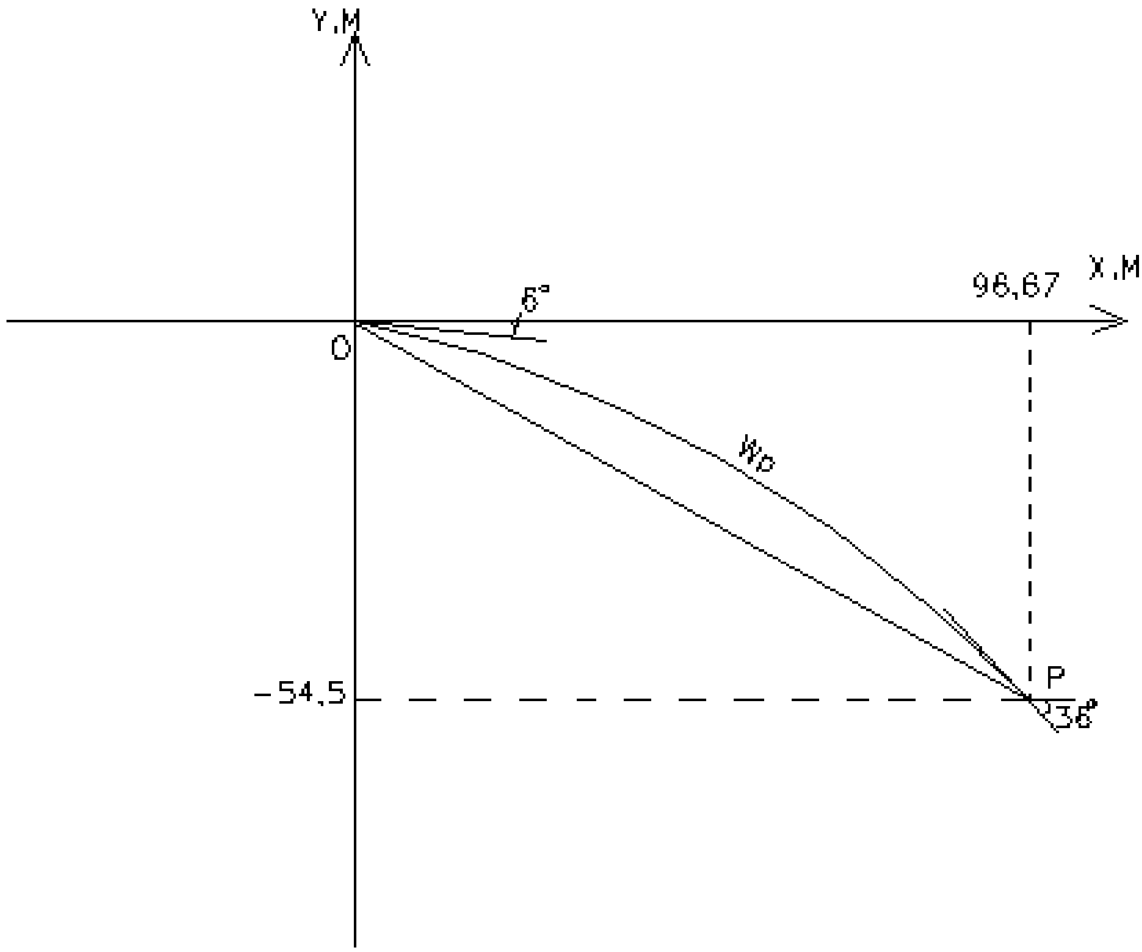
$$\alpha = arctg\left(\frac{54.5}{96.67}\right)+arctg\left(\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\right) \qquad (7)$$

Хорду AB (рис.3) сначала поворачиваем вокруг точки B до горизонтали на угол arctg $[(y_B - y_A)/(x_B - x_A)]$, потом, чтобы попасть в заданные координаты, еще на угол arctg(54.5/96.67).

При повороте клотоиды на угол α, на этот угол повернутся и касательные в точках A и B (рис. 3). До поворота угол наклона касательных к горизонтали β, как отмечалось выше (3), равен $\pi t^2/2$. Тогда, для точек A и B должны выполняться следующие равенства.

$$\begin{aligned} arctg\left(\frac{54.5}{96.67}\right)+arctg\left(\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\right)&=\frac{36\cdot\pi}{180}+\frac{\pi\cdot t_A^2}{2} \\ arctg\left(\frac{54.5}{96.67}\right)+arctg\left(\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\right)&=\frac{6\cdot\pi}{180}+\frac{\pi\cdot t_B^2}{2} \end{aligned} \qquad (8)$$

Окончательно, задача решается следующим образом. При задании в уравнении (6) параметра t_A (который соответствует точке A), при заданном значении Wp, численно получаем значение параметра t_B (который соответствует точке B). После этого, зная пару значений параметров t_A и t_B, проверяется выполнение равенства (8). Если оно не выполняется (хотя бы одно из двух), то, с определенным шагом, изменяется значение Wp и снова проверяется система (8). Оказалось, что задача имеет решение при Wp = 112.5 м. При этом значении Wp выполняется система равенств (8). То есть, после поворота, углы наклона касательных к горизонту составят заданные величины: в точке A – 36^0; в точке B – 6^0, что и требовалось по заданию.



Wp–длинна дуги участка клотоиды между точками О и Р .
Рис.1

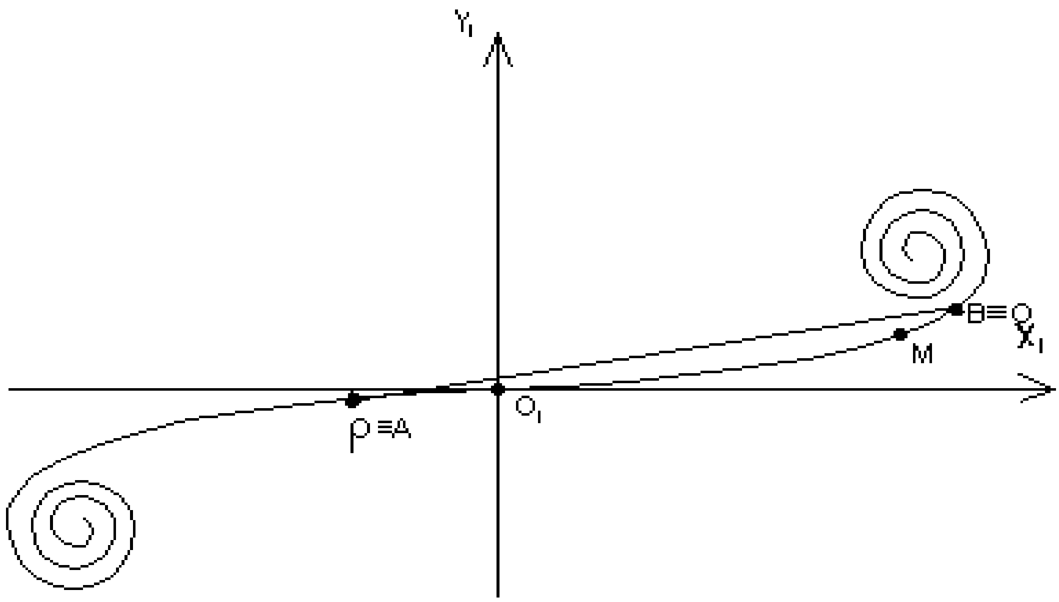


Рис.2

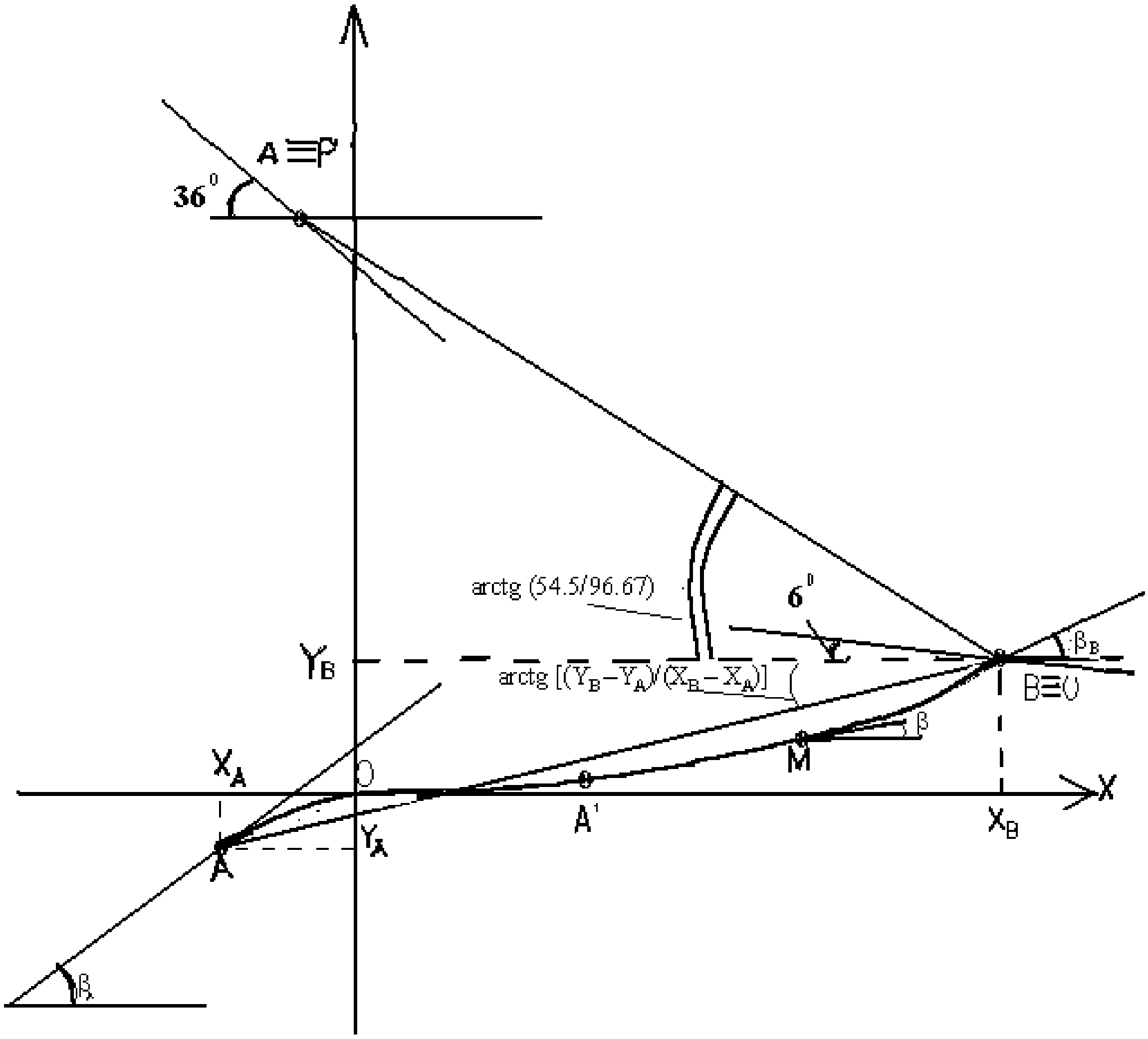


Рис.3

Заключение:

1. Доказано, что две точки с заданными координатами (0;0) и (96.67;-54.5) можно соединить участком клотоиды таким образом, что углы наклона касательных в этих точках к горизонту будут равны 6 и 36 градусов соответственно, как требовалось по заданию. Длина этого участка клотоиды равна 112.5 м.
2. Предложенным способом возможно вписание клотоиды в любые заданные две координаты с заданными углами сопряжения. При этом, не всегда возможно равенство длины клотоиды заданной.
3. Программы численного решения задачи, разработанные автором, позволяют выдавать ординаты заданного участка клотоиды как через каждые 5 метров по горизонтали (по заданию), так и через любое другое расстояние.

4. Существует возможность представления результатов решения поставленной задачи в табличной форме
5. Полученные результаты используются при постройке 120-метрового трамплина в Октябрьском районе г. Уфы (первого в России 120-метрового трамплина пологой траектории).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. Н. Семендяев К. А. "Справочник по математике"

Аннотация

CORRECTION OF A CURVE OF TOUCHDOWN FROM DESKTOP OF SEPARATION UP TO A POINT OF A BEGINNING OF TOUCHDOWN

Zotov Aleksey

The article is devoted to calculating of the numerical solution for the problem connected with construction the clothoid passing through two fixed points. The obtained results are used at building of 120-m modern springboard.