

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВИХРЕВЫХ УСТРОЙСТВАХ

Жолобова Г.Н., Хисаева Е.М., Сулейманов А.А., Галиакбаров В.Ф.
Уфимский государственный нефтяной технический университет,
кафедра «Вычислительная техника и кибернетика»
email: nt-centr77@yandex.ru

Статья посвящена теоретическому исследованию вихревого движения. Получена формула для расчета поля скоростей по вихрю с учетом дивергенции. На основании полученных результатов построены линии тока в смесительном аппарате СНВ-200. Описаны основные этапы построения численной модели с помощью программного комплекса FlowVision. Полученные в результате вычислительного эксперимента линии тока хорошо совпадают с теоретическими.

Ключевые слова: вихревое движение, поле скоростей, дивергенция, векторное поле, формула Стокса, калибровочное условие, несжимаемая жидкость, расчетная область, граничные условия, итерация

Вихревые устройства широко используются для интенсификации процессов в нефтепромысловой механике. В настоящее время разработка конструкции вихревых устройств осуществляется эмпирическим или экспериментальным путем из-за отсутствия систематизированных теоретических исследований. Поэтому нами сделана попытка углубления и систематизации теоретических исследований вихревого движения нагнетаемых агентов в закручивающих аппаратах. Рассмотрим вопрос о нахождение поля скоростей по вихрю и дивергенции.

Пусть $f(x, y, z)$ – заданная функция жидкости – плотность источников жидкости, $\vec{\omega}(x, y, z)$ – заданный вектор угловой скорости. Для нахождения поля скоростей $\vec{v}(x, y, z)$ имеем два уравнения [1]

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = f \\ \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\omega} \end{cases} \quad (1)$$

Представим исходную величину в виде

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (2)$$

На векторное поле \vec{v}_1 наложим условие

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v}_1 = f \\ \operatorname{rot} \vec{v}_1 = 0, \quad v_1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} \vec{v} = \text{grad } \varphi \\ \Delta \varphi = f \end{cases},$$

где $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$. Решением уравнения Пуассона будет

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\omega(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. Тогда вектор \vec{v} вычисляется по формуле:

$$\vec{v}_1 = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_V \frac{\omega(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (4)$$

Обратимся к решению задачи отыскания \vec{v}_2 . С учетом (3) система уравнений (1) имеет вид

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{v}_2 = 2\vec{\omega} \\ \text{div } \vec{v}_2 = 0, \quad v_1 = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Из условия $\text{div } \vec{v}_2 = 0$ следует

$$\vec{v}_2 = \text{rot } \vec{A}. \quad (6)$$

где \vec{A} – вспомогательный, пока еще неизвестный вектор. С учетом этого равенства первое уравнение из системы (7) принимает вид

$$\text{rot } \text{rot } \vec{A} = 2\vec{\omega}.$$

Следовательно, используя известное векторное тождество $\text{rot } \text{rot } \vec{A} = \text{grad } \text{div } \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$, имеем $\text{grad } \text{div } \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = 2\vec{\omega}$.

На векторное поле \vec{A} всегда можно наложить калибровочное условие Лоренца [2]:

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

Тогда

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -2\vec{\omega}.$$

Это уравнение легко решается и дает

$$\vec{A} = -\frac{1}{2\pi} \iiint_V \frac{\vec{\omega}(\xi, \eta, \zeta) dV}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

Таким образом, по заданным f и $\vec{\omega}$ вектор скорости определяется как

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

где \vec{v}_1 и \vec{v}_2 вычисляются по формулам (4) и (6). Циркуляция \vec{v} вдоль контура L равна

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \, d\vec{r}.$$

По формуле Стокса [3]:

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \, d\vec{r}_2 = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \, \vec{n}_2 \, dS = 2 \iint_S \vec{\omega} \, \vec{n} \, dS$$

В физике имеет место теорема Гельмгольца:

$$\iint_{S_1} \vec{\omega} \, \vec{n} \, dS = \iint_{S_2} \vec{\omega} \, \vec{n} \, dS,$$

т. е. поток вихря скорости сквозь произвольно выбранное сечение трубки (или интенсивность вихревой трубки) одинаков вдоль всей трубки. Если S_1 и S_2 малы, то

$$\omega_2 S_2 = \omega_1 S_1.$$

Если $\vec{\omega} = \text{const}$, а объем V – цилиндрический, то можно показать, что из (9) следует, что

$$V_{2\varphi} = \omega r, \quad r \leq R, \quad V_{2r} = V_{2z} = 0.$$

Тогда $f = f(z)$, из формулы (4) вытекает решение

$$V_{1z} = \int f(z) dz + \frac{C_1}{r}, \quad V_{1\omega} = V_{1r} = 0. \quad (7)$$

Тогда $\vec{V}(V_{1z}, \omega r, 0)$ – поле скоростей, где учтен дивергентный член V_{1z} .

Разработанная теория вихревого движения позволила сконструировать смеситель нефти с водой марки СНВ-200. Конструкция позволяет получить вихревые потоки нефти и воды с минимальными энергетическими потерями. Отличительной особенностью данного аппарата является наличие двух завихрителей закручивающих потоки воды и нефти в противоположных направлениях.

На рис. 1 представлены линии тока в рассматриваемом устройстве (1а – продольное сечение, 1б – поперечное сечение за аппаратом закрутки воды).

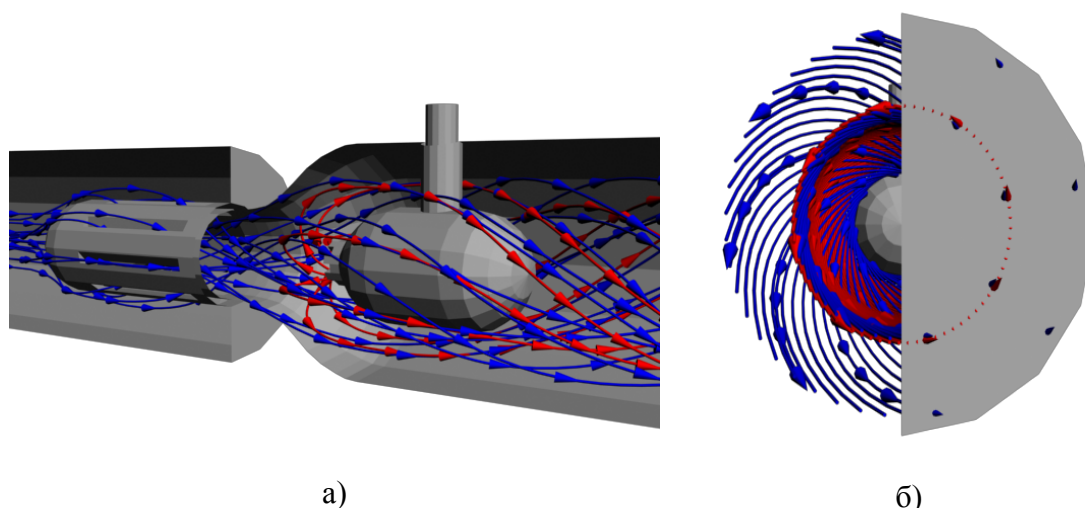


Рисунок 1. Поле скоростей потоков нефти и воды в СНВ-200

Для проверки теоретических исследований нами был проведен численный эксперимент.

В пакете FlowVision моделировалась работа рассматриваемого устройства. Для определения области расчета во FlowVision импортирована разработанная геометрия аппарата [4]. Для расчетов использовалась математическая модель для несжимаемой жидкости. Данный тип модели позволяет производить моделирование течения жидкости при больших числах Рейнольдса. Основные расчетные уравнений решались для скорости, концентрации и турбулентности.

Принятые допущения позволяют использовать [5]:

- уравнения Навье–Стокса;
- уравнения переноса турбулентных функций;
- уравнение конвективно - диффузионного (или чисто конвективного) переноса.

Затем нами были определены значения опорных величин температуры и давления, а так же установлены физические параметры модели.

Далее произведена установка глобальных переменных (гравитация, уровень жидкостей) и назначены граничные условия.

Для расчетов использовалась неравномерная сетка, так как разрабатываемое устройство имеет сложную геометрию. В данном случае сетка была разбита на следующее количество узлов: $20 \times 20 \times 60$. В областях, расположенных около выхода закрученного потока воды сетка измельчается вручную. В процессе расчета

программа FlowVision автоматически может дополнительно разбивать ячейки на более мелкие для получения более точного результата расчета.

Процедура расчета итерационная. Каждая итерация обозначает некоторый шаг по времени. Нами устанавливалось значение временного шага, равное 1/10 пролетного времени, т.е. промежутка времени с момента входа частицы жидкости в объект, до выхода этой частицы из объекта. Поскольку в последующих расчетах требуется сравнение нескольких результатов с различными скоростями, то используется одинаковое время пролета. В данных расчетах было установлено значение 0.025 с.

От количества итераций зависит конечная точность расчетов. Для обеспечения объективности сравнения во всех расчетах проводилось одинаковое число итераций, равное 200, что при шаге 0.025 с, равно 5 с времени. Так как частица нефти, двигаясь со скоростью 6 м/с преодолевает смеситель длиной 2 метра за 0.33(3) с, то расчеты за 5 с предоставляют достаточно точные результаты.

После установки основных параметров моделирования производится расчет, длительность которого определяется количеством требуемых итераций, сложностью геометрии рассчитываемого объекта, количеством ячеек в сетке и мощностью компьютера. Во время расчета для каждой итерации решается система уравнений и определяются характеристики системы в каждом узле сетки.

Результат численного моделирования работы смесителя СНВ-200 представлен на рис. 2.

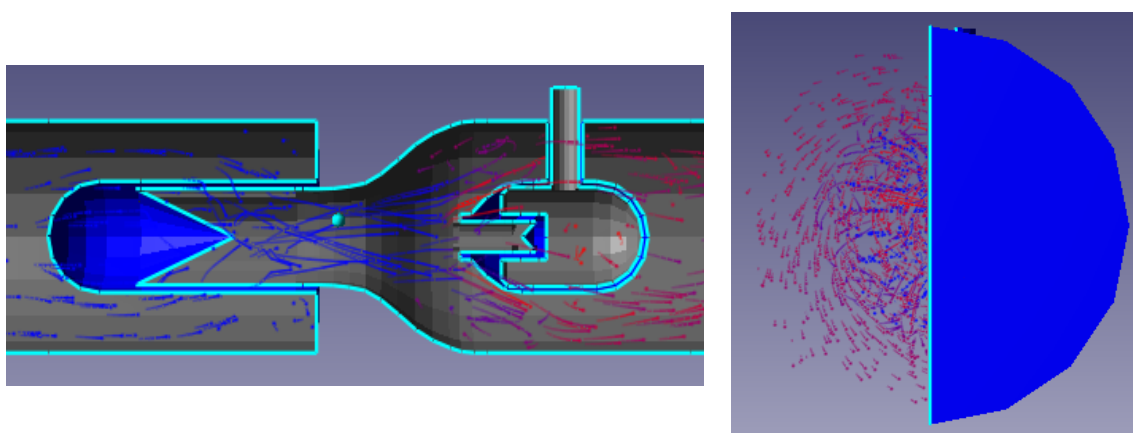


Рисунок 2. Линии тока, полученные в результате моделирования работы смесителя СНВ-200

Полученные линии тока в продольном и поперечном сечении хорошо совпадают с линиями тока, полученными с помощью уравнения (7). Результаты численного эксперимента и теоретических исследований нами использовались при разработке смесительных устройств использующихся при обессоливании нефти. Теоретические исследования и численные эксперименты позволили определить рациональные характеристики смесителей для подготовки нефти, сократить энергетические и технологические затраты на обессоливании нефти, уменьшить расход энергии, промывной воды и деэмульгатора.

Литература

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа : Учебник для вузов.-7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
2. Елизарова Т. Г. Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа. М.: Физ. фак. МГУ, 2005. С. 122-130.
3. Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006. С. 62-70.
4. Кондранин Т.В., Ткаченко Б.К., Березникова М.В., Евдокимов А.В., Зуев А.П. Применение пакетов прикладных программ при изучении курсов механики жидкости и газа: Учебное пособие. М.: МФТИ, 2005. 104 с. // сайт компании «ТЕСИС», посвященный программному продукту FlowVision: [сайт] [2010] URL: <http://www.flowvision.ru/content/view/84/lang,russian/> (дата обращения 10.05.10).
5. Использование средств компьютерного моделирования в курсах механики жидкости и газа: Учебно-методическое пособие / Сост. Кондранин Т.В., Ткаченко Б.К., Березникова М.В. и др. М.:МФТИ, 2005. С. 15-20.