

Тройниковые соединения трубопроводов (тройники), являются одними из наиболее распространенных элементов, представляют собой частный вариант соединения пересекающихся оболочек, к которым помимо них также относятся: крестообразные, разветвляющиеся и коленные соединения [1, 2, 3]. Расчет тройниковых соединений, благодаря их сложной пространственной конфигурации, представляется весьма сложным, поэтому аналитические методы определения напряженного состояния оказываются неприемлемыми в силу своей трудоемкости [4, 5, 6, 7]. Для инженерных расчетов, на сегодняшний день, существует целый комплекс различных методик, которые дают результаты той или иной степени точности [8, 9]. К сожалению, в большинстве случаев эта точность является не слишком высокой. Возможно, создание альтернативной методики расчета напряженного состояния тройникового соединения позволит в ряде случаев получить лучшие результаты.

Решить эту задачу без сложных вычислений с использованием дифференциальных или интегральных уравнений теории упругости можно путем применения закона сохранения энергии упругой деформации для условно консервативной механической системы.

В данной работе представлены некоторые результаты анализа напряженного состояния тройникового соединения труб с помощью заявленного способа, с обоснованием его адекватности на основе экспериментальных и теоретических данных.

#### **ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА.**

Известно, что согласно фундаментальному закону сохранения энергии полная механическая энергия системы, находящейся под действием консервативных сил, т.е. сил работа которых зависит только от начального и конечного положений, остается постоянной.

Тройниковое соединение труб, находящееся под действием внутреннего давления или внешних нагрузок, очевидно, является механической системой, подверженной действию консервативных сил. Причем, можно считать, что эта система состоит из двух отдельных механических систем, а именно – пересекающихся труб. Другими словами, полная энергия тройникового соединения будет равна сумме полной энергии основной трубы и полной энергии отвода.

Из этой посылки можно сформулировать постулат, определяющий методику расчета напряженного состояния тройникового соединения через полную энергию деформации: избыточная энергия деформации сосредоточенная в зоне концентрации напряжений равна энергии, которая в отсутствии этого концентратора была бы распределена в его объеме.

То есть для тройникового соединения это значит, что в зоне пересечения двух труб сосредоточена энергия, которая была распределена в материале труб, изъятом при их соединении (круглое в плане сверху отверстие в основной трубе и круглой формы срез в продольном плане у отвода).

Определив удельную энергию деформации в каждой из пересекающихся труб и умножив на изъятый из каждой трубы объем материала, мы получим количество запасенной энергии. Потенциальная энергия сосредоточенная в элементарном объеме согласно [10] будет определяется как:

$$dU = 0,5dxdydz(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (1)$$

где  $\sigma_i$  – напряжение по оси  $i$ ;

$\varepsilon_i$  – относительное удлинение по оси  $i$ ;

$\gamma_{ij}$  – угол сдвига.

В главных напряжениях удельная потенциальная энергия деформации будет выражаться в виде:

$$U_{уд} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) \quad (2)$$

Согласно [8], в тонкостенной цилиндрической оболочке находящейся под действием внутреннего давления  $\sigma_3=0$ , а остальные главные напряжения определяются как:

$$\sigma_1 = \frac{R_c P}{h}$$

и

$$\sigma_2 = \frac{R_c P}{2h} \quad (3)$$

где  $R_c$  – радиус срединной поверхности оболочки;

$P$  – внутреннее давление;

$H_c$  – толщина стенки оболочки.

При этом  $\sigma_1$  является кольцевым напряжением, а  $\sigma_2$  – осевым напряжением.

При подстановке формул (3) и (4) в выражение (2) получается зависимость удельной потенциальной энергии деформации тонкостенной цилиндрической оболочки от внутреннего давления:

$$U_{уд} = \frac{R_c^2 P^2 (5 - 4\mu)}{8Eh_c^2} \quad (4)$$

Прежде чем получить зависимость для определения полной энергии деформации, необходимо определить объем изъятой части из основной трубы и отвода. Эти величины можно найти как разность объемов фигур полученных пересечением цилиндров различных диаметров. В свою очередь, объем тела, образованного пересечением двух цилиндров можно вычислить путем двойного интегрирования ограничивающей тело сверху функции по основанию такого цилиндрического тела:

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (5)$$

где  $f(x, y)$  – подынтегральная функция;

$D$  – область интегрирования;

$d\sigma$  – элемент площади;

$x, y$  – переменные интегрирования.

Определим объем пространственной фигуры, ограниченной цилиндрическими поверхностями  $z = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$ ,  $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$  и плоскостью  $z = 0$ , где  $R$  и  $r$  – радиусы пересекающихся цилиндров, причем, для них выполняется соотношение  $R > r$  (рисунок 1).

Поверхность, ограничивающая тело сверху, имеет уравнение  $z = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$ . Область интегрирования  $D$  получается как проекция на плоскость  $Oxy$  линии пересечения цилиндра  $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$  с ограничивающей тело сверху поверхностью и имеет форму окружности  $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$  (рисунок 2).

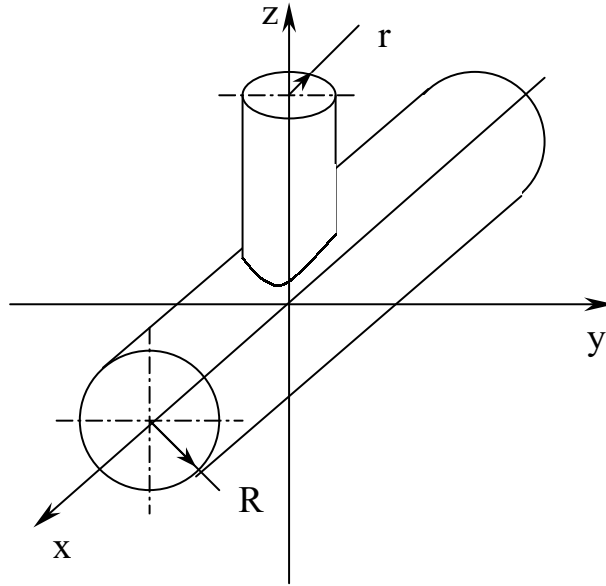


Рисунок 1 – Пересечение цилиндров

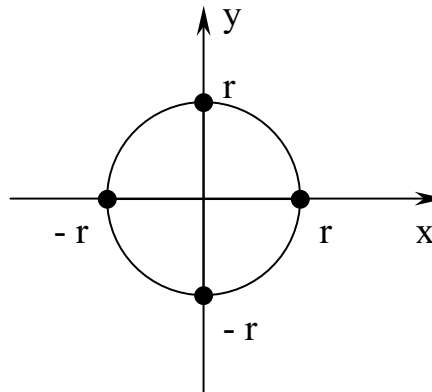


Рисунок 2 – Проекция на плоскость  $Oxy$  линии пересечения цилиндров

Ввиду симметрии тела относительно плоскостей  $Oxy$  и  $Oyz$ , можно вычислить объем его четвертой части, расположенной в первом координатном угле. Этот объем равен двойному интегралу, распространенному по четверти окружности  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Интегрирование производим сначала по переменной  $y$ , а затем по переменной  $x$ :

$$\frac{1}{4}V = \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{R^2-y^2} dy \quad (6)$$

Однако в процессе вычисления возникает необходимость выразить в конечном виде через элементарные функции первообразную, выраженную в общем виде

интегралом  $\int \sqrt{1 - K^2 \sin^2 x} dx$ , где ( $K < 1$ ). Эта первообразная называется эллиптическим интегралом, относится к так называемым табличным функциям, и обозначается  $E(x)$ :

$$E(y) = \int \sqrt{1 - K^2 \sin^2 y} dy \quad (7)$$

Эта функция достаточно хорошо исследована, и для нее составлены таблицы значений при различных значениях переменной. Однако аналитически вычислить интеграл (6) можно только для частного случая равенства радиусов пересекающихся цилиндров ( $r = R$ ).

#### СЛУЧАЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ОДИНАКОВОГО РАДИУСА.

В случае пересечения цилиндров одинакового радиуса выражение (6) будет иметь вид:

$$\frac{1}{4} V^* = v = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - y^2} dy \quad (8)$$

Для удобства вычисления выражения (8) перейдем к полярным координатам, в которых интеграл будет иметь вид:

$$v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \rho d\rho \quad (9)$$

После взятия интеграла (9) по основанию  $d\rho$  – получим:

$$v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{(R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi)}{3 \sin^2 \varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi} \right]_0^R d\varphi \quad (10)$$

Следовательно:

$$v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3 (1 - \cos^3 \varphi)}{3 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (11)$$

Очевидно:

$$v = \frac{R^3}{3} \left( \sin \varphi + \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (12)$$

Для того чтобы устранить неопределенность деления на ноль, преобразуем полученное выражение (12) с помощью тригонометрических формул:

$$v = \frac{R^3}{3} \left( \sin \varphi + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R^3}{3} \quad (13)$$

Окончательное выражение для определения объема фигуры, образованной пересечением двух одинаковых правильных цилиндров, ограниченных снизу плоскостью  $z = 0$ , будет иметь вид:

$$V^* = 4v = \frac{8R^3}{3} \quad (14)$$

С помощью формулы (14) можно найти объем фигуры, ограниченной поверхностями четырех попарно пересекающихся цилиндров с совпадающими осями симметрии и плоскостью  $z = 0$ .

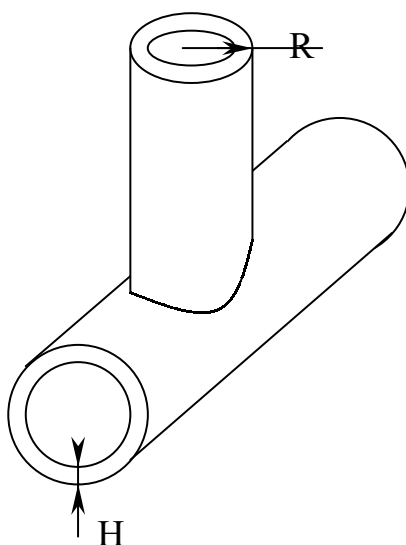


Рисунок 3 – Равнопроходной тройник

Таким образом, от геометрических моделей мы переходим к реальному тройниковому соединению труб (рисунок 3). Обозначим внутренний радиус трубы  $R$ , а

толщину стенки трубы  $H$ . Необходимо сделать замечание, что как ранее удалось получить аналитическое выражение только для случая равенства радиусов пересекающихся цилиндров, так и теперь вычисления можно вести только в случае равенства толщин пересекающихся труб.

Искомый суммарный объем  $V$  изъятого из основной трубы и отвода материала будет определяться как разница объемов  $V_{R+H}^*$  и  $V_R^*$ , вычисленных по формуле (14) для пар цилиндров с радиусами  $(R + H)$  и  $R$ :

$$V = V_{R+H}^* - V_R^* = \frac{8}{3} [(R + H)^3 - R^3] = \frac{8}{3} [H^3 + 3RH(R + H)] \quad (15)$$

где  $R$  – внутренний радиус трубы;

$H$  – толщина стенки трубы.

Формула (15) применима для определения избыточной энергии деформации без дифференцирования на объем, изъятый из основной трубы, и объем, изъятый из отвода, поскольку имеет место соединение одинаковых труб, удельные энергии деформаций для которых равны.

К сожалению, равнопроходные тройники составляют не более 20% от общего числа используемых соединений, поэтому не менее важны все оставшиеся варианты соотношения между радиусами основной трубы и отвода.

#### **ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, КОГДА ДИАМЕТР ОДНОГО ЦИЛИНДРА МАЛ ПО СРАВНЕНИЮ С ДИАМЕТРОМ ДРУГОГО.**

Для расчета тройникового соединения труб через полную энергию деформации необходимо точно знать объем изъятого материала. Как уже упоминалось выше, точное аналитическое выражение можно получить только для равнопроходного тройника с равными толщинами стенок труб. Случай пересечения цилиндров с большим отношением радиусов не позволяет получить точные аналитические зависимости, однако можно ввести некоторые допущения, а именно, что кривая пересечения двух цилиндров является плоской окружностью.

В большинстве ранних работ предполагалось, что кривые пересечения двух цилиндров являются плоскими окружностями для отношения радиусов цилиндров  $m = r/R$  в диапазоне  $[0; 0,5]$ . Определим достоверность этого утверждения.

На рисунке 4 изображен поперечный разрез соединения двух пересекающихся цилиндров, где  $R$  – радиус основного (пересекаемого) цилиндра,  $r$  – радиус

пересекающего цилиндра, А и В – точки, принадлежащие кривой пересечения двух цилиндров, расположенные ближе всех к плоскости  $z = 0$  и лежащие на одном меридиане основного цилиндра.

В случае, когда  $r = R/2$ , точки А, В и центр окружности О, лежащий в плоскости меридиана, которому принадлежат А и В, образуют равносторонний треугольник.

Очевидно, что в таком случае длина дуги  $\overline{AB}$  будет определяться как:

$$\overline{AB} = \frac{\pi R}{3} \quad (16)$$

А длина отрезка прямой  $AB$  будет равна:

$$AB = 2r = R \quad (17)$$

Следовательно, если принять отрезок  $AB$  за 100%, то длина дуги  $\overline{AB}$  будет составлять 104,7%, т.е. отклонение равно 4,7%. Поскольку в инженерных расчетах в подавляющем большинстве случаев допускаются отклонения до 5%, то утверждение о возможности рассматривать кривую пересечения двух цилиндров как плоскую окружность можно считать доказанным.

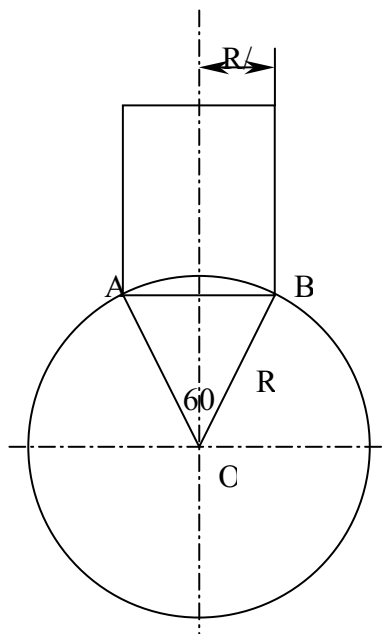


Рисунок 4 – Поперечный разрез соединения



Из утверждения, что кривая пересечения цилиндров является плоской окружностью, вытекает, что пересекающийся цилиндр, по принятому допущению, представляет собой цилиндр с торцом, перпендикулярным образующим этого цилиндра.

В таком случае, переходя от пересечения цилиндров к пересечению труб, объем изъятого из основной трубы и отвода материала будет определяться как объем диска:

$$V = \pi H r^2 \quad (18)$$

где  $r$  – внутренний радиус отвода;

$H$  – толщина стенки основной трубы.

Объединив полученные физические и геометрические выкладки, учитывая при этом, что на образование максимального расчетного напряжения в тройниковом соединении идет всегда одна и та же доля избыточной энергии и эта энергия приходится на единицу объема получим:

Для случая сравнительно малого диаметра отвода:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\sigma} + \sigma_{\text{дон}} = \frac{PR_c}{H} + KR_c r P \sqrt{\frac{\pi(5-4\mu)}{4H}} \quad (19)$$

А для случая равнопроходного тройника:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\sigma} + \sigma_{\text{дон}} = \frac{PR_c}{H} + KR_c P \sqrt{\frac{2(5-4\mu)}{3H} (H^3 + 3RH(R+H))} \quad (20)$$

## Выводы

1. Из-за сложности представления эллиптического интеграла аналитическое решение возможно только для случая равнопроходного тройникового соединения с одинаковой толщиной стенок сопрягаемых труб.

2. Решение с достаточно высокой степенью точности возможно получить допущением о линии пересечения цилиндрических оболочек как плоской кривой (окружности).

3. Проведенная экспериментальная проверка показывает хорошую сходимость полученных теоретических и экспериментальных данных с учетом принятых допущений.

4. Полученные зависимости отличаются достаточной простотой и физической ясностью, что обуславливает преимущество данного подхода по сравнению с существующими приближенными и точными аналитическими методами расчета напряженного состояния тройникового соединения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Батенчук А.Н. Изготовление и монтаж технологических трубопроводов.– М.: Стройиздат, 1971.– 304 с.

2. Закиров О.А., Шаталина М.А., Греб А.В., Габбасова А.Х. Исследование влияния гидродинамики на эксплуатационную надежность технологических трубопроводов.– Уфа: Изд. УГНТУ, 1999.– 53 с.

3. Технологические трубопроводы промышленных предприятий / Тавастшерна Р.И., Бесман А.И.– М.: Стройиздат, 1991.– 655 с.

4. Чехов В.Н., Шевляков Ю.А. Концентрация напряжений возле люков на поверхности цилиндрических оболочек // Концентрация напряжений, 1968.– №2.– С. 218-231.

5. Сельский Ю.С. Вопросы расчета цилиндрической оболочки ослабленной круговым отверстием: Автореферат канд. техн. наук.– М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 1970.– 21 с.

6. Arour A.R., Schalentheorie endlichen verformungen und die kreiszyllinderschale mit kreisrundem ausschnitt bei endlichen verformungen // Dok. – ingen. geneh. diss.– Hannover, 1970.

7. Lekkerkerker I.G. On stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole.– Delft: Uitgeverij waltman, 1965.

8. Вихман Ю.Л., Бабицкий И.Ф., Вольфсон С.Н. Расчет и конструирование нефтезаводской аппаратуры. – М.: Гостоптехиздат, 1953.– 287 с.

9. Гуревич Д.Ф. Основы расчета трубопроводной арматуры.– М.: Машгиз, 1956. – 321 с.

10. Александров А.В., Потапов В.Д. Соппротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности.– М.: Высшая школа, 2002.– 400 с.