

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ В ЦЕНТРИФУГАХ, ИМЕЮЩИХ КАВЕРНЫ РАЗЛИЧНОЙ ПРАВИЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Васильев Д.Ю., Кузнецов В.А., Чувывров А.Н.

*Башкирский государственный университет*

*Представлены результаты численного исследования влияния кориолисовой силы и различных профилей поперечного сечения на протекание волновых процессов в центрифугах. Важной особенностью данной работы является разработка численного метода решения уравнений волнового движения путем описания профиля поперечного сечения моделируемых каверн рядами степенных функций, что существенно облегчает решение задач такого рода. Движение жидкости происходит из-за разности уровней жидкости в начале и на конце каверн.*

## **Введение**

Изучение волновых процессов, происходящих в кавернах различного поперечного сечения, представляет большой научный интерес и является актуальным как в приложении к инженерной практике, так и для различных геофизических задач. Физика этих процессов, однако, настолько сложна, что в настоящее время не существует ни общего аналитического решения этой задачи, ни численного решения, которое учитывало бы одновременно если не все, то хотя бы основные физические процессы, имеющих место в задачах массопереноса жидкости в кавернах. Так, например, многие описанные в литературе теоретические модели [1-3] не рассматривали влияние эффекта вращения системы координат на волновые процессы, происходящие в кавернах с различным профилем поперечного сечения. Представленные в данной работе результаты математического моделирования таких волновых процессов в кавернах различного профиля поперечного сечения, получены путем численного интегрирования системы дифференциальных уравнений Эйлера [4] (волновые уравнения). В работе представлен алгоритм, позволяющий получать решение многих гидродинамических задач при помощи пакета программ MathCad2001 [5].

### *Постановка задачи*

Рассматривается случай плоского горизонтального слоя жидкости (воды), который в невозмущенном состоянии вращается равномерно около вертикальной оси. Длина исследуемых каверн составляла до  $10^3$  единиц длины (ед. д.), ширина 300 ед. д. Результаты применимы к каверне не очень больших размеров, координаты которых в рамках вращающихся систем координат известны. За ось вращения в данной работе принималась ось  $z$  и предполагалось, что оси  $x$  и  $y$  вращаются с заданной угловой скоростью  $\omega$  (равной частоте вращения Земли) в плоскости  $xy$  относительно оси вращения. Скорости перемещения частиц жидкости вдоль осей  $x$ ,  $y$ , и  $z$  в момент времени  $t$  и обладающих координатами  $(x, y, z, t)$  обозначались соответственно через  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Принимая равновесную форму свободной поверхности за поверхность отсчета и обозначив соответственно через  $\alpha$  и  $\phi$  полюсное расстояние (т. е. угол между нормалью и полярной осью) и долготу лежащей на ней точки, получаются следующие уравнения движения частиц жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma \omega \sin \phi \cos \alpha v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma \omega \sin \phi \sin \alpha u \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $g$  есть ускорение свободного падения.

Уравнение свободной поверхности (неразрывности) выводится аналогично и имеет вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0.$$

Глубина  $h$  определяется в виде  $h = h_0 + w$ , где  $h_0$  – равновесная глубина, а  $w$  определяет отклонение от равновесного значения. Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (h.u)}{\partial x} + \frac{\partial (h.v)}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

и, выделяя  $\frac{\partial w}{\partial t}$  из (2), получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial (h.u)}{\partial x} - \frac{\partial (h.v)}{\partial y}. \quad (3)$$

Таким образом, система уравнений (1) вместе с уравнением свободной поверхности (3), образуют новую систему уравнений (4), которая использовалась для решения задачи данной работы.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma \omega \sin \phi \cos \alpha v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma \omega \sin \phi \sin \alpha u, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial(hu)}{\partial x} - \frac{\partial(hv)}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Система уравнений (4) решалась сеточным методом в рамках программы MathCad2001i. Максимальное значение времени принималось равным 60 секундам, что значительно превышает характерные времена установления равновесия при исследуемом характере течения. Так как в начальный момент времени жидкость находилась в относительном покое, то принимались следующие начальные условия:

$$u(x, y, 0)=0, v(x, y, 0)=0. \quad (5)$$

Уровень воды в начале каверны принимался за 0, а в конце канала (бассейна) -1, поэтому

$$w(x, y, \cdot) = \begin{cases} -1, & y = \cdot \\ \cdot, & y > \cdot \end{cases} \quad (6)$$

Для простоты уровни воды в задаче принимались постоянными, т.е. в начале каверны (бассейна) – 0, после – -1. Поэтому краевые условия задавались в следующем виде:

$$w(x, 0, t) = -1, w(x, b, t) = 0, \quad (7)$$

где  $x, y$  – координаты точки в каверне,  $t$  – время,  $v(x, y, t)$  и  $u(x, y, t)$  – компоненты скорости течения жидкости вдоль и поперек каверне, соответственно;  $w(x, y, t)$  – функция отклонения поверхности возмущенной жидкости от формы относительного равновесия.

Сетка по  $x, y$  и  $t$  задавалась следующими формулами:

$$X_i = -a + i \cdot dx, \quad i = \cdot \dots N_x \quad (8)$$

$$Y_j = j \cdot dy, \quad j = \cdot \dots N_y \quad (9)$$

$$T_k = k \cdot dt, \quad k = \cdot \dots N_t \quad (10)$$

$$H_{i,j} = h(x_i, y_j) \quad (11)$$

где  $N_x, N_y$ , – дробления по оси  $x$  и  $y$  соответственно,  $N_t$  – дробление по времени,  $dx, dy, dt$  – шаги сеток по соответствующим осям,  $H_{i,j}$  – дробление уровней воды по осям  $x$  и  $y$

Решения  $u, v, w$  краевой задачи искались в виде сеточных функций  $U_{i,j,k} = u(x_i, y_j, t_k)$ ,  $V_{i,j,k} = v(x_i, y_j, t_k)$ ,  $W_{i,j,k} = w(x_i, y_j, t_k)$  и выражая  $V_{i,j,k+1}, U_{i,j,k+1}, W_{i,j,k+1}$  из соответствующих уравнений, были получены значения этих сеточных функций по слоям ( $k = 0, 1, 2, \dots, N_t$ ).

Рассмотрим решения уравнений движения жидкости для основных профилей каналов и бассейнов: прямоугольного, треугольного, параболического и трапецидального.

*а). Решения системы (4) для каверны прямоугольной формы.* Профиль прямоугольного сечения задавался в виде следующей функции:

$$h(x) = h_0 \cdot \left( \frac{a^{2n} - x^{2n}}{a^{2n}} \right) \quad (12)$$

В формуле (12)  $h_0$  – определяло начальную глубину, а постоянная  $a$  – начальную полуширину каверны. Легко показать, что с ростом степни  $n$  в формуле (12), функция  $h(x)$  стремится к прямоугольному виду и выбор  $n = 55$  при этом является достаточным, что определяет крутизну стенок каверны, при уменьшение  $n$  стенки канала сглаживаются. На рисунках 1 и 2 графически отображены результаты решения системы уравнений (4) для волнового движения жидкости в каверне (рис. 1) и каверне равной площади (рис. 2) с прямоугольными поперечными сечениями. За направление оси  $x$  взята ширина каверны, ось  $y$  соответствует длине каверны. Вертикальная ось  $z$  совпадает с направлением колебаний жидкости относительно уровня свободной поверхности.

*б). Решения системы (4) для каверны треугольной формы.* Профиль треугольного поперечного сечения задавался следующей функцией:

$$h(x) = h_0 \left( 1 - \frac{1 - \sqrt{1 + x^2 \cdot \lambda^{-2}}}{1 - \sqrt{1 + a^2 \cdot \lambda^{-2}}} \right) \quad (13)$$

где  $h_0$  – гидравлический радиус или глубина канала или бассейна, а постоянная  $a$  является полушириной канала или бассейна. Как видно из (13),  $h(x)$  представляет собой гиперболу, однако при малых  $\lambda \leq 1$  профиль  $h(x)$  становится близким к треугольному виду, поэтому в данной работе принималось  $\lambda = 1$ . Решения системы уравнений (4) для треугольного профиля даются графически для канала (рис.3) и каверны с равной площадью (бассейн) (рис. 4), которые показывают размывающие скорости.

*в). Решения системы (4) для канала и бассейна параболической формы.* Профиль параболического поперечного сечения задавался в виде следующей функции:

$$h(x) = h_0 \cdot \frac{(a^2 - x^2)}{a^2} \quad (14)$$

$h(x)$  – глубина каверны в точке  $x$ ,  $a$  – их полуширина. Решения для отклонения свободной поверхности жидкости для каверны (рис. 5) и бассейна (рис. 6) с параболическими поперечными сечениями представлены в графическом виде.

*г). Решения системы (4) для канала и бассейна трапецидальной формы.* Профиль канала или бассейна с трапецидальным поперечным сечением задавался в виде следующей функции:

$$h(x) = \begin{cases} a_0 - |x|, & \text{if } |x| \leq a_0 \\ h_0, & \text{if } |x| > a_0 \end{cases} \quad (15)$$

где  $a_0 = 25$ , является полушириной дна трапецидального канала. При значении  $a_0 \sim 0$  профиль канала превращается в треугольный, а при  $a_0 \sim a$  – в прямоугольный. На рисунках 7 и 8 показан характер протекания волновых процессов в трапецидальных канале и бассейне, соответственно.

### ***Результаты и их обсуждение***

Итак, результаты численного интегрирования системы уравнений (4) показали, что амплитуда волн, возникающих на уровне свободной поверхности в кавернах переменного сечения меньше по своей величине от амплитуды волн возникающих в бассейне с одинаковым поперечным сечением. В самом деле,

расчитанная максимальная амплитуда волн в них не превышала 4 ед. д., тогда как в бассейнах волны могут достигать 10 ед. д. в высоту. Моделирование волновых процессов также показало, что характер возникающих волн должен быть различным в каналах и бассейнах. Так если амплитуда волн в каналах возрастает по мере продвижения волны вдоль длины канала, то в бассейнах волны гасятся по мере их продвижения в глубь бассейна. Влияние кориолисовой силы проявляется в кавернах и бассейнах всех исследованных профилей поперечного сечения, но в разной степени. Так во всех типах кавернах волны, возникающие по левому берегу, характеризовались большей амплитудой по сравнению с правобережными волнами. При этом периодичность возникающих волн различна для разных типов профилей поперечного сечения, а геометрия возникающих волн зависит от формы поперечного сечения кавернах. Расчеты предсказывают, что в параболическом и треугольном кавернах форма возникающих волн должна быть более сложной и хаотичной, в отличие от трапецеидального и прямоугольного кавернах, в которых максимальные значения волн приходится на левый берег, а на правом берегу наблюдаются затопленные струи (т.е. движения жидкости ниже уровня свободной поверхности), чего вообще нет в бассейнах. Проявление кориолисовой силы является менее заметным, чем в кавернах: в бассейнах возникающие волны максимальны по высоте на правой половине бассейна. Важным отличием бассейнов от каверн является то, что геометрия возникающих волн повторяет форму поперечного сечения и силы, возникающие при отклонении поверхностного слоя здесь несравнимо велики по сравнению с таковыми при движении воды в затопленных струях. Теперь сравним влияние профилей каверн и бассейнов на движение жидкости, так в бассейнах процессы массопереноса происходят по всей их площади, в кавернах же движение жидкости происходит в отдельных участках. В прямоугольном канале движение жидкости в центре равномерное и увеличивается по мере отдаления к берегам, что свидетельствует о подмывании стенок, в бассейне же происходит последовательное прохождение прямоугольных волн последовательно сменяющих друг друга и затухающих со временем. Для треугольной каверны характерно увеличение движения жидкости в его центре с дальнейшим нарастанием по длине, движение жидкости в бассейне с треугольным профилем с максимальной силой в центре и рассеиванием волн со

временем. Параболические каверна и бассейн повторяют характер движения жидкости в треугольном, с отличием в том, что волны возникающие здесь, более сглаженные. Движение жидкости в трапецидальной каверне и бассейне сравнима с прямоугольным и параболическим и является своеобразной переходной формой, между ними. В заключении отметим, что разработанный метод позволяет решать различные гидродинамические задачи: расчет каскадов водохранилищ, каналов с изменяющимися профилями поперечного сечения от истока к устью, с изменяющимися гидравлическими уклонами.

### Литература

1. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184-192.
2. Ингель Л.Х. Класс точных нестационарных решений уравнений мелкой воды с вращением // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30. № 5. С. 718-720.
3. Жвания М.А., Калашник М.В., Кахиани В.О., Нанобашвили Дж.И., Патарашвили К.И., Цакадзе С.Дж. Формирование азимутальных течений, создаваемых системой источник-сток массы во вращающемся параболоиде // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 61-75.
4. Агроскин И.И., Дмитриев Г.Т., Пикалаов Ф.И. Гидравлика. М., Л.: Энергия, 1964. С. 93.
5. Дьяконов В. MathCad8/2000: специальный справочник – СПб: Питер, 2001. – 592с.: ил.

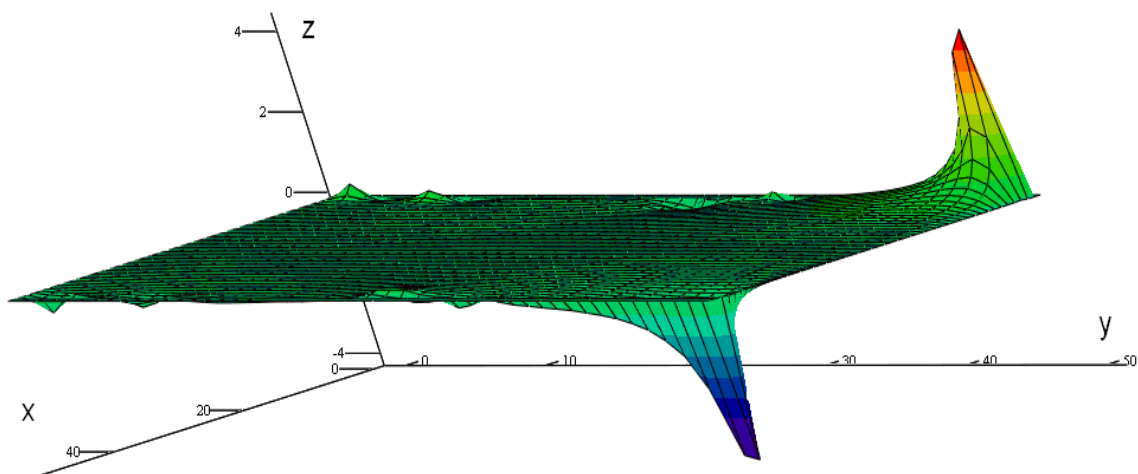


Рисунок 1. Характер изменений свободной поверхности в канале с прямоугольным поперечным сечением

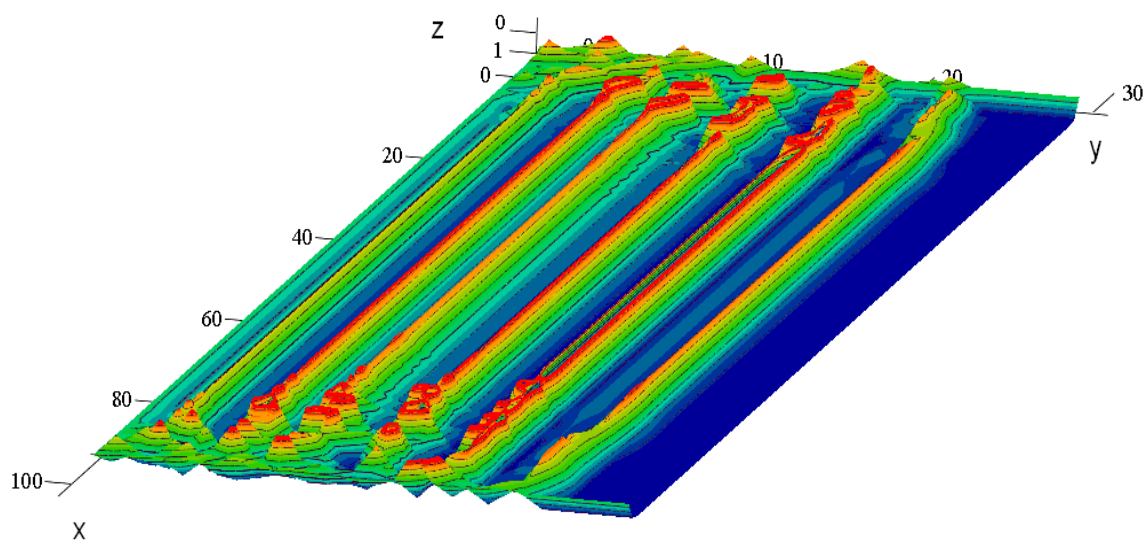


Рисунок 2. Волнообразное изменение уровня свободной поверхности в прямоугольном бассейне.



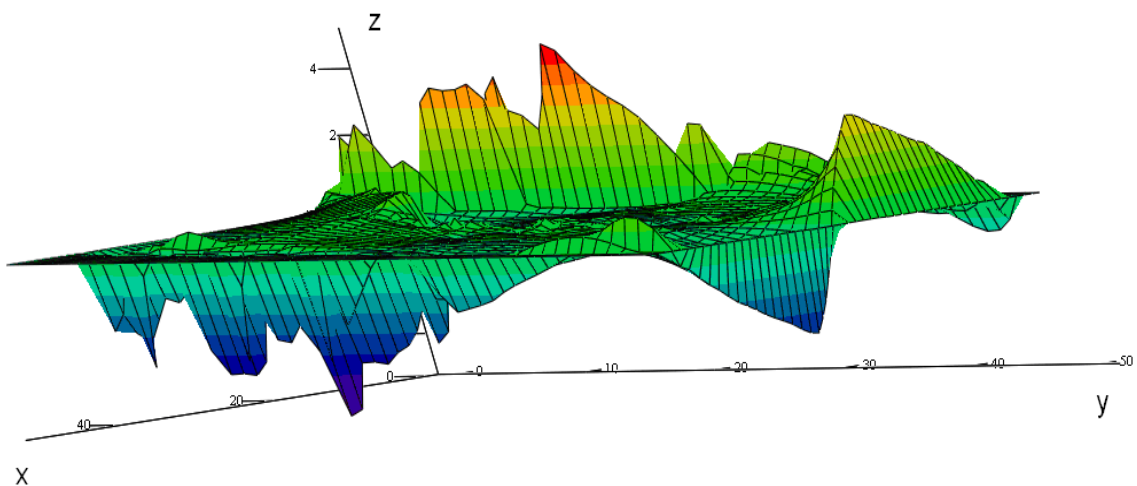


Рисунок 3. Волнообразное изменение уровня свободной поверхности в канале треугольного сечения

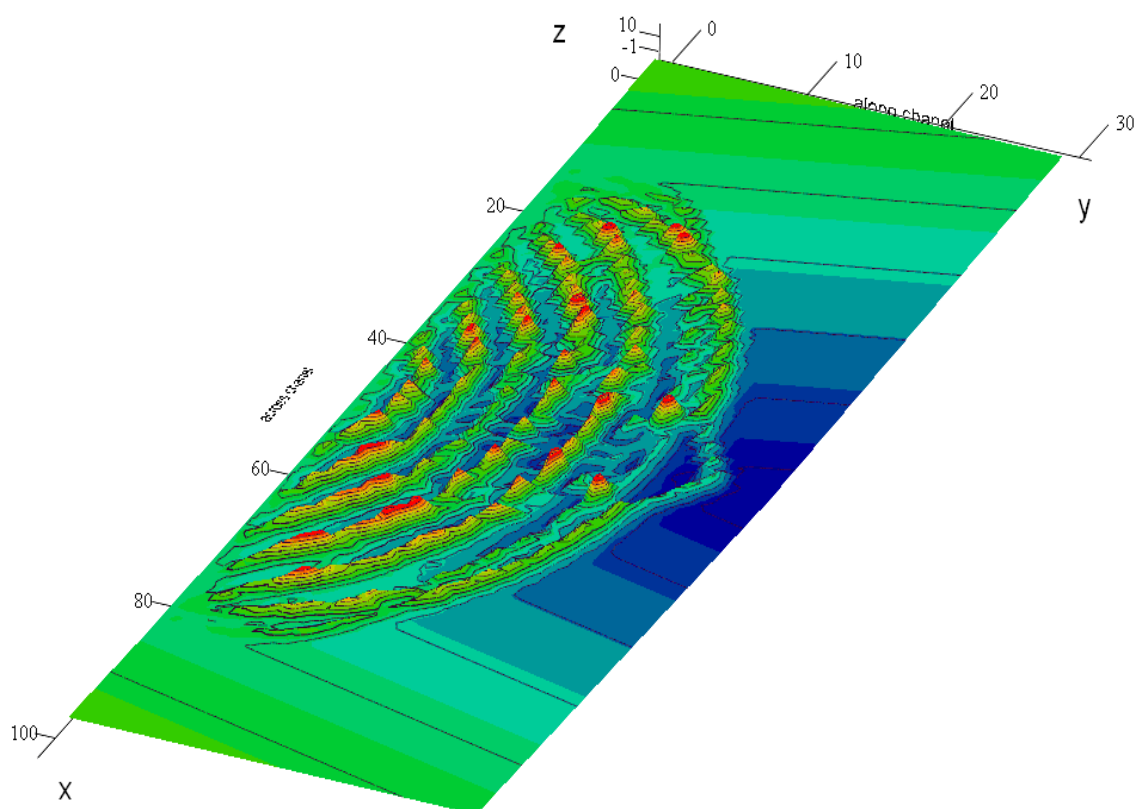


Рисунок 4. Волнообразное изменение уровня свободной поверхности в бассейне треугольного сечения

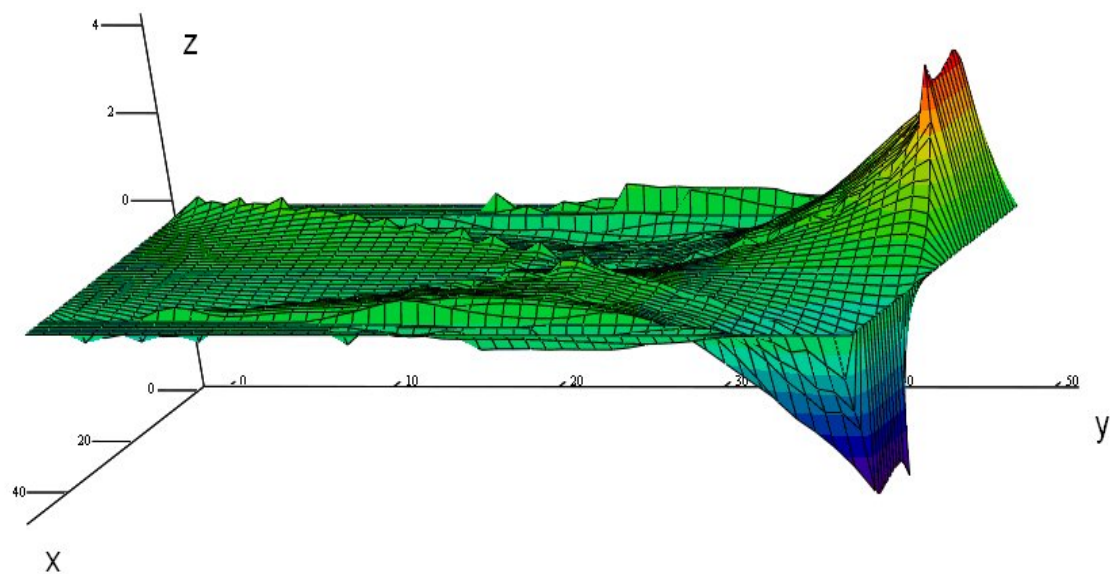


Рисунок 5. Отклонение свободной поверхности  
в канале с параболическим сечением

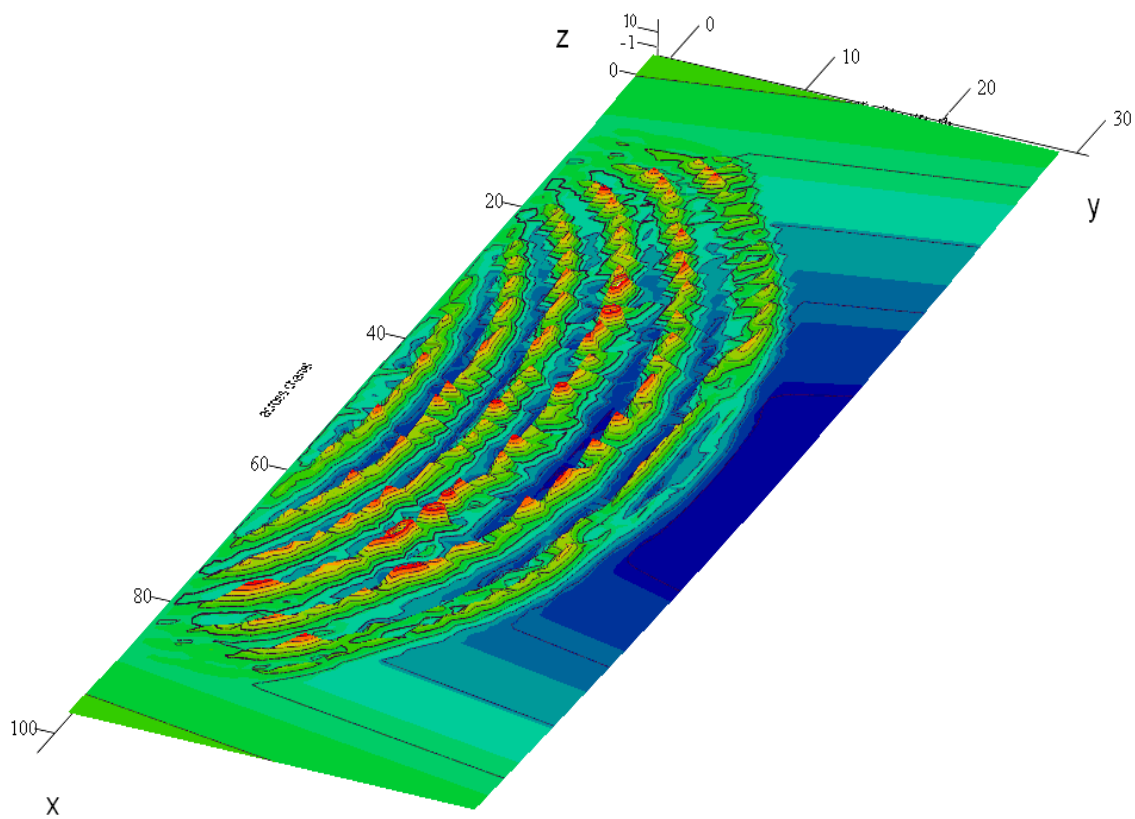


Рисунок 6. Характер отклонение свободной поверхности  
в бассейне с параболическим сечением

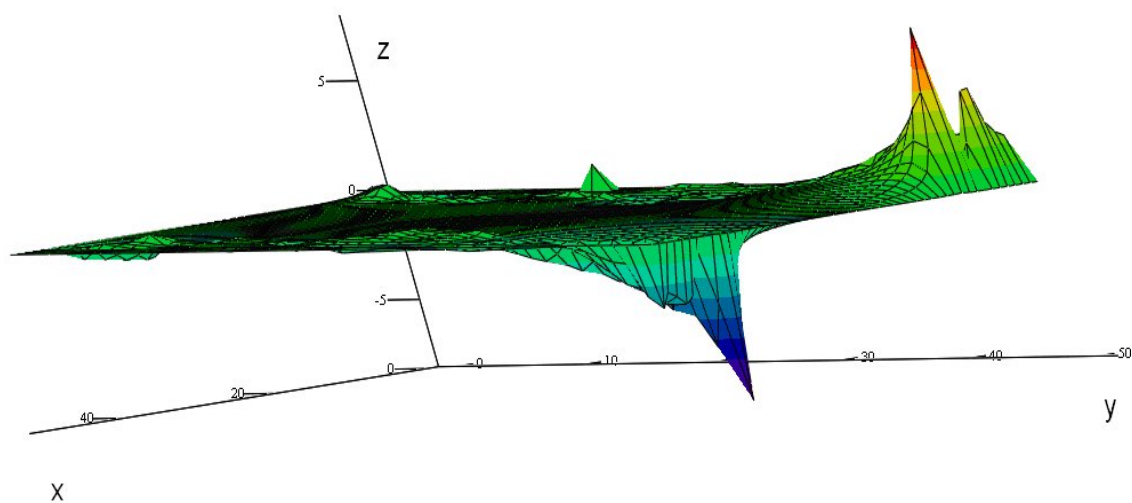


Рисунок 7. Характер отклонения поверхности возмущенной жидкости от уровня равновесия в трапецидальном канале.

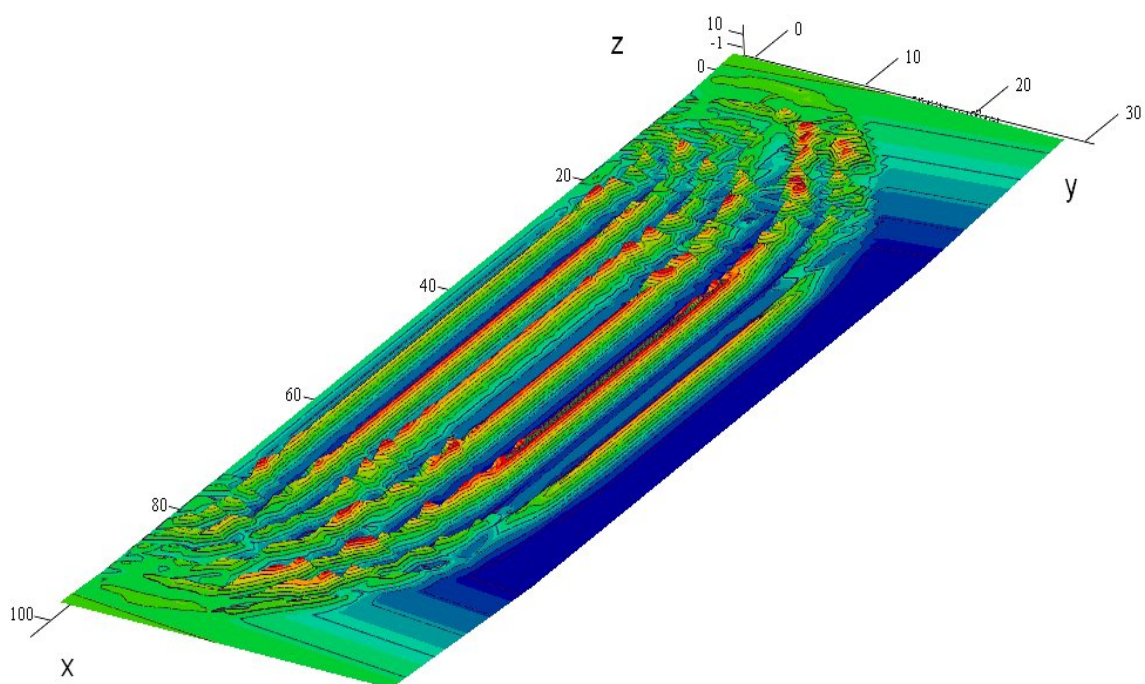


Рисунок 8. Характер отклонения поверхности возмущенной жидкости от уровня равновесия в трапецидальном бассейне