УДК 622.691.4:519.711.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УЧАСТКА МАГИСТРАЛЬНОГО ГАЗОПРОВОДА ДЛЯ ЗАДАЧ ИМИТАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

Цхадая Н.Д., Тетеревлева Е.В., Ягубов З.Х. [1]
Ухтинский Государственный технический университет г. Ухта
e-mail: [1] zyagubov@ugntu.net

Аннотация. *Показано, что в составе АСУ ТП газотранспортных предприятий необходимо иметь подсистему имитационного моделирования технологического процесса транспортировки. Делается вывод о том, что многие производственные и проектные задачи допускают использование простых и доступных в расчетных задачах изотермических моделей. Это характерно для подземной прокладки газопроводов, когда температурный режим газового потока определяется сравнительно стабильной температурой грунта в зоне их пролегания. Построены и оценены те взаимозависимости переменных состояния и параметров объекта, которые позволяют выделить математическую модель его установившегося состояния.*

Ключевые слова: *участок магистрального трубопровода, математическая модель, установившийся режим, технологические и конструктивные параметры, аппроксимация, дискретизация, изотермическая математическая модель*

Для эффективного управления магистральными газопроводами, а также для диагностики и прогнозирования состояния транспортной системы особое значение имеет возможность математического или имитационного моделирования объекта.

Для решения задач моделирования динамических процессов магистральных газопроводов наиболее приемлем подход, основанный на сопоставлении свойств математической модели и свойств численного метода решения дифференциальных уравнений, но его реализация связана с множеством проблем, одной из которых является универсальность полученной модели [1].

Решение неординарной задачи построения внутренне устойчивой аппроксимационной динамической имитационной математической модели невозможно без анализа фундаментальных результатов исследования этих моделей. Кроме того, такие модели необходимы в проектных, технологических, диагностических и других расчётах, связанных с выбором наиболее эффективных конструкций или технологического регламента [2, 3]. Для корректного решения такого рода задач аналитически построенную, и, следовательно, структурно адекватную процессу математическую модель необходимо идентифицировать параметрически.

Структура взаимозависимостей переменных состояния распределённого объекта такова, что его математическая модель очень чувствительна к большинству конструктивных и технологических параметров, и имеет физический смысл только в определённых, очень узких, их диапазонах. Исследования по определению этих диапазонов (как технологических, так и конструктивных) позволяют уточнить (т.е. параметрически идентифицировать) ряд трудноопределимых регламентных технологических переменных, а также рассчитать диапазоны их возможных значений. Кроме того, целесообразно разработать математические инструменты решения задачи выбора робастного сочетания конструктивных параметров [9].

Для универсальности имитационной модели, аппроксимирующей распределённый объект, необходимо придать ей структуру такой динамической системы, в которой максимально облегчается структурная перестройка, сохраняющая основные черты распределённого оригинала, но содержатся параметрические настройки технологических свойств, а также действия внешних возмущающих и управляющих воздействий. В связи с этим проблему целесообразно исследовать на конкретном и максимально простом примере объекта с одной пространственной координатой.

К таким объектам относятся трубопроводы транспортировки природного газа, которые в реальных магистралях реализуются в виде отдельных участков, разделенных газоперекачивающими агрегатами.

При этом решения, обеспечивающие блочно-модульное построение модели и алгоритма, эффективно раскрываются лишь на схемном уровне. Основой таких решений может быть только централизованное и сквозное обеспечение изменения всех настроек модели. Это относится как к конструктивным размерам, так и к технологическим параметрам. Кроме того, для обеспечения стабильности работы модели, необходимо в каждую ячейку программно передавать значения важнейших для объекта переменных состояния, отвечающих текущим статическим профилям их распределения.

В связи со сформулированным подходом в работе ставится и решается задача расчёта и сквозной передачи значений плотности и массового расхода газа. Наряду с этим важно получить оценки предельных возможностей исследуемого участка магистрального газопровода: конструктивных при заданных значениях технологических переменных, и, наоборот, технологических при заданных значениях конструктивных параметров. Для решения всего комплекса обозначенных во введении задач необходимо исследовать те аналитические возможности, которые предоставляет получаемые на стадии математического моделирования динамические и статические характеристики распределённого объекта. Прежде всего необходимо построить и оценить те взаимозависимости переменных состояния и параметров объекта, которые позволяют выделить математическую модель его установившегося состояния.

В описываемых в данной статье исследованиях используется изотермическая математическая модель, задаваемая системой дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида, полученного путём нелинейного преобразования базиса переменных состояния модели:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} ; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -2 \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \left(\left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^2 - \frac{R \cdot T}{\mu} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{4}{D} \cdot \lambda \cdot \varepsilon \cdot \left| \frac{\varepsilon}{\rho} \right| . \tag{2}$$

В (1), (2) введены следующие обозначения: $\rho = \rho(x,t)$, $w(x,t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(x,t) = \rho(x,t) \cdot w(x,t)$ – плотность и скорость транспортируемого газа, а также переменная состояния потока газа, имеющая физический смысл массового расхода, соответственно. Обе переменные являются функциями независимых аргументов: пространственного x и временного t.

Константы модели и начальные условия переменных состояния заданы значениями, взятыми для одного из реальных участков магистрального газопровода: $R = 8{,}3144$ Дж/моль•К; $T_0 = 303$ К; $\mu = 0{,}01604$; $\rho_0 = \rho(0{,}0) = 47{,}7521$ кг/м^3; $\varepsilon_0 = 506{,}268$ м^2; $D = 1{,}22$ м; $\lambda = 0{,}000661$ м^4/с^3.

Полученная математическая модель (ММ) позволила рассчитать параметры магистральных трубопроводов [4]. Она является основой для получения различных частных моделей, изучение которых позволяет получить закономерности исследуемых связей и свойств объекта моделирования.

Эффективным приёмом проверки корректности результатов построения динамической ММ является исследование её в статическом состоянии. Для частного случая ММ (1 - 2), описывающего законы функционирования объекта в установившемся режиме транспортировки газа необходимо учесть, что в соответствие с условиями статики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} = 0 .$$

Тогда из (1), с учётом отсутствия зависимости от аргумента t, следует, что

$$\frac{d \varepsilon}{d x} = 0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 = \mathrm{const} ,$$

и уравнение (2), с учётом однонаправленности векторной переменной $\varepsilon = \varepsilon(x,t)$ в статике, приводится к форме

$$\frac{d \rho}{d x} = \frac{4 \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \rho \cdot \varepsilon_0^2}{D \cdot \left(\mu \cdot \varepsilon_0^2 - R \cdot T \cdot \rho^2 \right)} ,$$

в которой переменные ρ и x разделяются:

$$\frac{d \rho}{\rho} - \frac{R \cdot T}{\mu \cdot \varepsilon_0^2} \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{4}{D} \lambda \cdot dx . \tag{3}$$

В связи с поставленной задачей необходимо проинтегрировать уравнение (3) и получить зависимость лишь одной переменной состояния ρ от x, т.к. в выбранном нелинейном базисе вторая переменной состояния ε в статике становится константой. Исследуемый режим позволяет проверить соответствие параметров стационарных точек фактическим их значениям, а также выявить взаимосвязи важнейших конструктивных и технологических параметров.

Интегрирование (3) даёт уравнение связи ρ с ε_0 и x, которое, правда, оказывается неявным относительно ρ. В нём явным оказывается выраженным аргумент x:

$$x=\frac{D}{4\cdot\lambda}\cdot\left[\frac{R\cdot T}{2\cdot\mu\cdot\varepsilon_0^2}\cdot\left(\rho_0^2-\rho^2(x)\right)+\ln\frac{\rho(x)}{\rho_0}\right]. \tag{4}$$

Эта особенность создаёт некоторые неудобства при расчётах, но позволяет решать любые задачи, связанные с установившимся распределением плотности, а также, через связь переменных состояния $\varepsilon=\varepsilon(x,t)=\rho(x,t)\cdot w(x,t)$, с распределением скорости потока.

Сложная по математической взаимосвязи переменных функция (4) параметрически ограничена. Её обратная структура задания аргумента по заданному значению функции порождает возможность попыток некорректного использования, когда подставляются недопустимые значения зависимой переменной, и вычисляются абсурдные с физической точки зрения значения аргумента.

В связи с этим функцию (4) необходимо исследовать на предмет получения реальных ограничений на область определения и область значений. Поскольку моделируемые участки не могут иметь бесконечную протяжённость в связи с протекающими при движении газа диссипативными процессами, а увеличивающаяся с падением давления и плотности газа скорость не может превышать скорость звука в его среде, функцию (4) необходимо исследовать на экстремум в сложившейся форме зависимости.

Необходимое условие наличия экстремума

$$\frac{dx}{d\rho}=\frac{D}{4\cdot\lambda}\cdot\left[-\frac{R\cdot T}{2\cdot\mu\cdot\varepsilon_0^2}\cdot\rho(x)+\frac{1}{\rho(x)}\right]=0$$

приводит к следующему выражению, задающему граничное значение плотности газа при заданных значениях конструктивных параметров и технологических переменных:

$$\rho(x)=\sqrt{\frac{\mu\cdot\varepsilon_0^2}{R\cdot T}}. \tag{7}$$

Для определения характера экстремума длины (хотя он и очевиден) необходимо исследовать вторую производную функции (4)

$$\frac{d^2x}{d\rho^2}=\frac{D}{4\cdot\lambda}\cdot\left[-\frac{R\cdot T}{\mu\cdot\varepsilon_0^2}-\frac{1}{\rho^2(x)}\right]<0. \tag{8}$$

Выражение (8) при любых ρ и ε, а значит и в точке (7), отрицательно, так что длина трубопровода, как и ожидалось, ограничена максимумом в этой точке.

Таким образом, физикой процесса транспортировки обусловливается параметрическое ограничение

$$L = x \le \frac{D}{8 \cdot \lambda} \cdot \left[\frac{R \cdot T \cdot \rho_0^2}{\mu \cdot \varepsilon_0^2} - 1 + \ln \frac{\mu \cdot \varepsilon_0^2}{R \cdot T \cdot \rho_0^2} \right], \tag{9}$$

где L – длина исследуемого участка.

Этот результат получен в работе [5] и исследован в работе [6]. Здесь он иллюстрируется вспомогательным графиками. На рис. 1 представлена зависимость предельно допустимой длины участка Xm от начального значения плотности Xm. Формула и график позволяют оценивать как требуемую начальную плотность газа, обеспечивающую его транспортировку по участку заданной длины, так и допустимую длину участка по номинальной выходной плотности газа выбранного ГПА.

Аналогично на рис. 2 представлена зависимость предельно допустимой длины участка Xm от установившегося номинального значения массового расхода газа εnul. Формула и график позволяют оценивать как допустимую длину участка по требуемой его производительности, так и предельную производительность участка заданной длины.

Характерно, что, если в качестве технологического параметра брать установившуюся линейную скорость потока газа $w(x)$, то предельно допустимая длина участка от начальной плотности не зависит. Это показано на рис. 3, где представлена зависимость предельной длины участка Xm от установившегося номинального значения скорости потока $wnul$. Формула и график позволяют оценивать допустимую длину участка независимо от параметров газоперекачивающего агрегата, если известно требуемое значение начальной линейной скорости потока.

При исследовании влияния конструктивных параметров на технологические удобнее строить обратные зависимости. Так на рис. 4 построена зависимость удельной производительности участка $\varepsilon(x, \rho 0)$ от его длины x при различных начальных значениях плотности $\rho 0$ газа на выходе из газоперекачивающего агрегата.

Фактическая длина эксплуатируемого трубопровода L должна быть меньше предельной, а с учётом возможных изменений параметров участка МГП и проходящего через него потока, она должна быть меньше граничного значения с достаточным запасом. Так, например, рассчитанное для приведённых выше параметров участка МГП значение критической длины участка трубопровода составляет $L_{кр} = 258{,}3$ км, т.е. реальный участок (120 км) почти вдвое короче предельного.

$$Xmax := \frac{D}{8\cdot\lambda}\cdot\left(\frac{R\cdot T0\cdot\rho0^2}{\mu\cdot\varepsilon0^2} - 1 + \ln\left(\frac{\mu\cdot\varepsilon0^2}{R\cdot T0\cdot\rho0^2}\right)\right) \qquad Xmax = 2.583\times10^5$$

$$Xm(\rho nul,\varepsilon0) := \frac{D}{8\cdot\lambda}\cdot\left(\frac{R\cdot T0\cdot\rho nul^2}{\mu\cdot\varepsilon0^2} - 1 + \ln\left(\frac{\mu\cdot\varepsilon0^2}{R\cdot T0\cdot\rho nul^2}\right)\right) \qquad Xm(47.75206, 506.268) = 2.583\times10^5$$

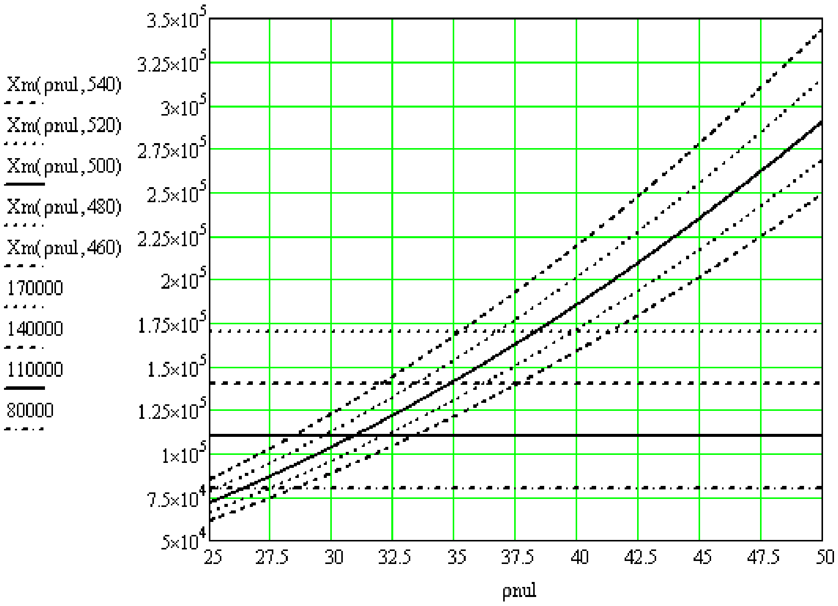

Рис. 1. Оценка влияния плотности газа на выходе ГПА на предельную протяжённость участка МГП

$$Xm(\varepsilon nul,\rho0) := \frac{D}{8\cdot\lambda}\cdot\left(\frac{R\cdot T0\cdot\rho0^2}{\mu\cdot\varepsilon nul^2} + \ln\left(\frac{\mu\cdot\varepsilon nul^2}{R\cdot T0\cdot\rho0^2}\right)\right)$$

$$Xm(10, 47.75206) = 6.661\times10^8$$

$$Xm(18, 47.75206) = 2.056\times10^8$$

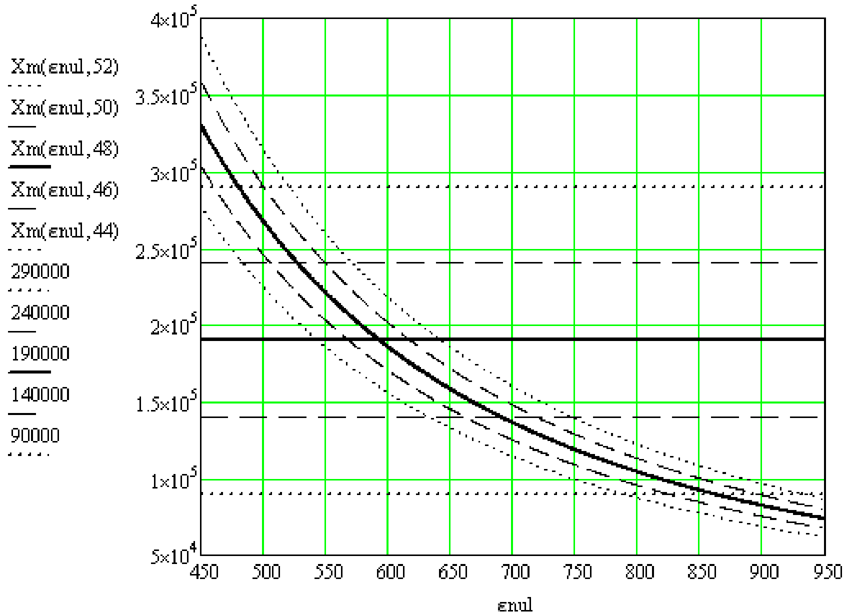

Рис. 2. Оценка влияния требуемого значения массового расхода газа на предельную протяжённость участка МГП

$$Xm(wnul) := \frac{D}{8\cdot\lambda}\cdot\left(\frac{R\cdot T0}{\mu\cdot wnul^2} + \ln\left(\frac{\mu\cdot wnul^2}{R\cdot T0}\right)\right) \qquad Xm(10) = 2.907\times10^5$$

$$Xm(18) = 8.9\times10^4$$

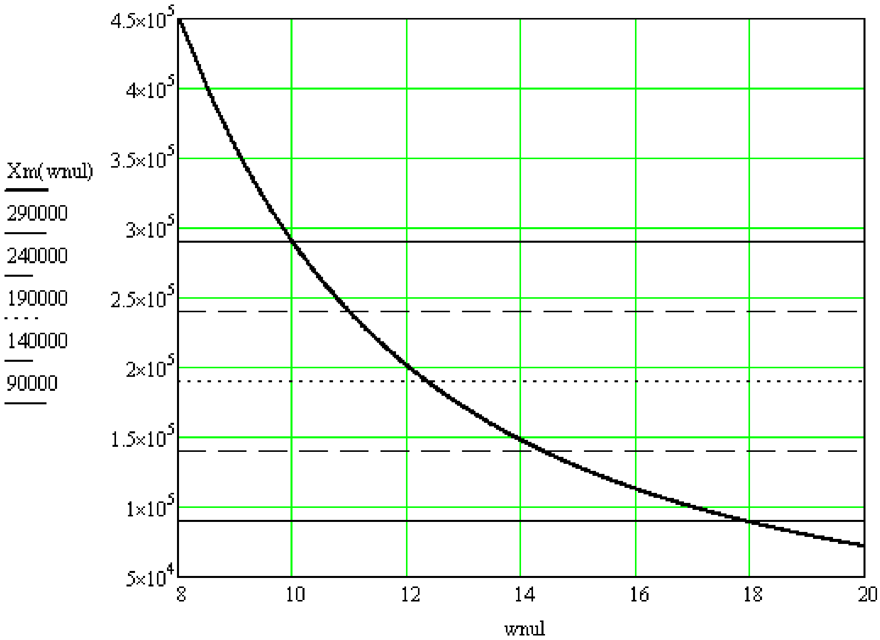

Рис. 3. Оценка влияния требуемого значения скорости потока на предельную протяжённость участка МГП

$$\varepsilon cr := \sqrt{\frac{R\cdot T0}{2\cdot\mu}}\cdot\sqrt{\frac{\rho0^2 - \rho f^2}{\ln(\rho0) - \ln(\rho f)}} \qquad \varepsilon cr = 1.63361\times10^4$$

$$\varepsilon(x,\rho0) := \sqrt{\frac{R\cdot T0}{2\cdot\mu}}\cdot\sqrt{\frac{\rho0^2 - \rho f^2}{\frac{4\cdot\lambda\cdot x}{D} + \ln(\rho0) - \ln(\rho f)}} \qquad \varepsilon\left(1.2\cdot10^5, 47.75206\right) = 506.268$$

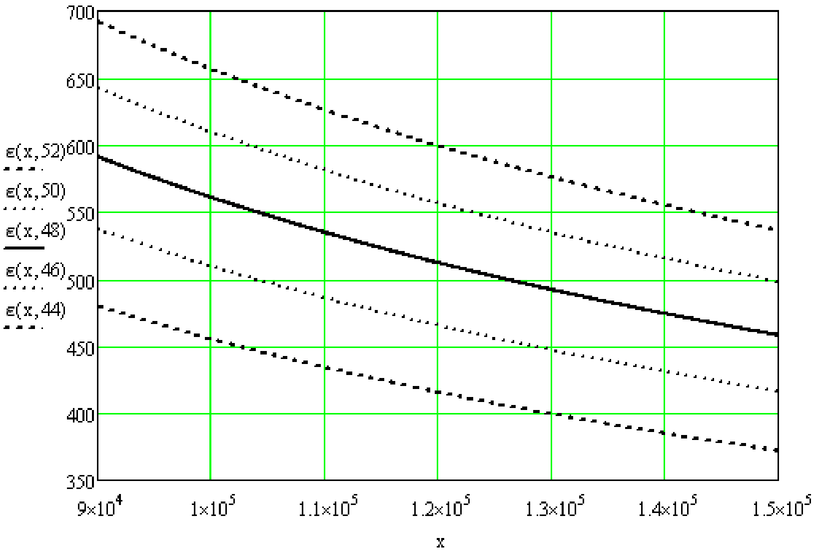

Рис. 4. Оценка влияния длины участка МГП на его удельную производительность

Конструктивные параметры трубопровода рассчитываются на стадии проектирования. При эксплуатации существующей магистрали возникают вопросы, связанные с варьированием технологических параметров, в первую очередь, производительности. Полученные для статического режима зависимости позволяют проводить соответствующие расчёты. Так на рис. 5 приведена зависимость производительности участка МГП от начальной плотности газа $\rho 0$ при различных значениях длины участка. Расчёт производится по формуле, полученной из (4) для полной длины участка L :

$$L=\frac{D}{4\cdot\lambda}\cdot\left[\frac{R\cdot T}{2\cdot\mu\cdot\varepsilon_0^2}\cdot\left(\rho_0^2-\rho^2(L)\right)+\ln\frac{\rho(L)}{\rho_0}\right]. \qquad (10)$$

$$\rho 0 := 35, 35.1 \,..\, 55$$

$$\varepsilon(x,\rho 0) := \sqrt{\frac{R\cdot T0}{2\cdot\mu}}\cdot\sqrt{\frac{\rho 0^2-\rho f^2}{\frac{4\cdot\lambda\cdot x}{D}+\ln(\rho 0)-\ln(\rho f)}} \qquad \varepsilon\left(1.2\cdot 10^5, 47.75206\right) = 506.268$$

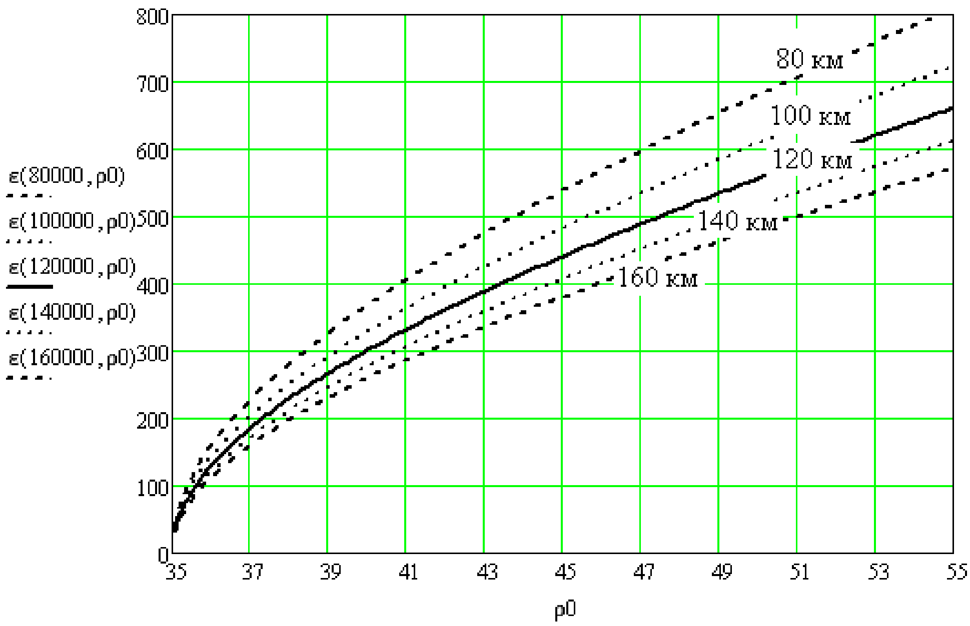

Рис. 5. Оценка влияния плотности газа на выходе ГПА на предельную производительность участка МГП при различных значениях его протяжённости

Полученные результаты демонстрируют возможности, которые предоставляет информационная обработка статической модели участка МГП. При этом следует учесть, что рассматриваемый пример объекта и его математической модели упрощен за счёт ряда допущений. Это, прежде всего, изотермический характер процесса транспортировки газа, равномерность распределения переменных состояния по сечению трубопровода, незначительность гравитационных составляющих действующих сил, постоянстве площади сечения трубопровода и др. Однако информационная насыщенность результатов такова, что позволяет вполне серьёзно делать прикидочные расчёты для различных технологических задач и задач автоматизации. Использование более адекватных моделей процессов транспортировки позволит реализовать более тонкие и точные расчётные технологии.

Литература

1. Тетеревлёва Е.В., Нейдорф Р.А., Ягубов З.Х. Проблемы моделирования процессов транспортировки магистральными трубопроводами // Системный анализ, управление и обработка информации: сборник научных статей / Под общ. ред. проф. Р.А. Нейдорфа. Ростов-на-Дону: ДГТУ, Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2007. С. 158 - 163.

2. Тетеревлёва Е.В. Статическая модель участка газопровода и перспективы её использования // Системный анализ, управление и обработка информации: сборник научных статей / Под общ. ред. проф. Р.А. Нейдорфа. Ростов-на-Дону: ДГТУ, Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2007. С. 164 - 168.

3. Нейдорф Р.А., Тетеревлёва Е.В. Простой алгоритм расчёта статики процесса транспортировки газа // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-21. Сб. трудов XXI Международ. науч. конф.: В 11-и томах. Т. 6. Саратов, СГТУ, 2008. С. 20 - 21.

4. Тетеревлева Е.В., Ягубов З.Х. Частные приложения результатов математического моделирования газового потока к задачам расчёта параметров магистральных трубопроводов // Системный анализ, управление и обработка информации: Труды 1-го Международного семинара студентов, аспирантов и ученых / Под общ. ред. Р.А. Нейдорфа. Ростов-на-Дону, ИЦ ДГТУ, 2010. 312 с. С. 50 - 58.

5. Тетеревлева Е.В., Ягубов З.Х. Ресурсная структурно-параметрическая настройка аппроксимированной математической модели распределённого объекта // Сб. трудов IX Международной научно-технической конференции «Инновация, экология и ресурсосберегающие технологии на предприятиях машиностроения, авиастроения, транспорта и сельского хозяйства». Ростов-на-Дону: ИЦ ДГТУ, 2010. С. 310 - 315.

6. Тетеревлева Е.В. Проблемы расчета и имитации динамических процессов транспортировки газа магистральными трубопроводами // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-21. Сб. трудов XXI Международ. науч. конф.: В 11-и томах. Т. 6. Саратов, СГТУ, 2008. С. 16 - 18.

UDC 622.691.4:519.711.3

MATHEMATICAL MODEL OF MAIN GAS PIPELINE SECTION FOR SIMULATION AND CONTROL

N.D. Tskhadaya, E.V. Teterevleva, Z.Kh. Yagubov [1]
Ukhta State Technical University, Ukhta, Russia
e-mail: [1] zyagubov@ugntu.net

***Abstract**. It is shown that in the control system of gas transportation companies must have a subsystem simulation process of transportation. The conclusion is that many manufacturing and design tasks allow you to use simple isothermal models. This is typical for underground installation of gas pipelines, when the temperature of the gas flow is determined by a relatively stable temperature of the soil in the area of their location. There are constructed and evaluated those interdependence of state variables and parameters of the object, which can provide a mathematical model of its steady state.*

***Keywords:** pipeline section, mathematical model, steady state, technological and design parameters, approximation, discretization, isothermal mathematical model*

References

1. Teterevleva E.V., Neidorf R.A., Yagubov Z.Kh. Problemy modelirovaniya protsessov transportirovki magistral'nymi truboprovodami (Problems of modeling of main pipelines transport), *Sistemnyi analiz, upravlenie i obrabotka informatsii: sbornik nauchnykh statei* (*System analysis, control and information processing: a collection of research papers*). Ed.: R.A. Neidorf. Rostov-na-Donu: DGTU, Taganrog, TTI YuFU, 2007. PP. 158 - 163.

2. Teterevleva E.V. Staticheskaya model' uchastka gazoprovoda i perspektivy ee ispol'zovaniya (The static model of the gas pipeline and prospects of its use), *Sistemnyi analiz, upravlenie i obrabotka informatsii: sbornik nauchnykh statei* (*System analysis, control and information processing: a collection of research papers*). Ed.: R.A. Neidorf. Rostov-na-Donu: DGTU, Taganrog: TTI YuFU, 2007. PP. 164 - 168.

3. Neidorf R.A., Teterevleva E.V. Prostoi algoritm rascheta statiki protsessa transportirovki gaza (A simple algorithm for calculating static process of gas transportation), *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh – MMTT-21. Sb. trudov XXI Mezhd. nauch. konf.* (*Mathematical Methods in Equipment and Technologies – MMET- 21. Proceedings of the XXI intern. sci. conf.*). In 11 volumes. Vol. 6. Saratov, SGTU, 2008. PP. 20 - 21.

4. Teterevleva E.V., Yagubov Z.Kh. Chastnye prilozheniya rezul'tatov matematicheskogo modelirovaniya gazovogo potoka k zadacham rascheta parametrov ma-gistral'nykh truboprovodov (Particular applications of the results of mathematical modeling of the gas flow to the problems of calculating the parameters of pipelines), S*istemnyi analiz, upravlenie i obrabotka informatsii: Trudy I Mezhdunarodnogo seminara studentov, aspirantov i uchenykh* (*Proceedings of the 1st Intern. workshop of students,*

graduates and scientists). Ed.: R.A. Neidorf. Rostov-na-Donu, IC DGTU, 2010, 312 p. PP. 50 - 58.

5. Teterevleva E.V., Yagubov Z.Kh. Resursnaya strukturno-parametricheskaya nastroika approksimirovannoi matematicheskoi modeli raspredelennogo ob"ekta (Resource structural-parametric tuning of approximated mathematical model of distributed object), *Sb. trudov IX Mezhd. nauchno-tekhn. konf. "Innovatsiya, ekologiya i resursosberegayushchie tekhnologii na predpriyatiyakh mashinostroeniya, aviastroeniya, transporta i sel'skogo khozyaistva"* (*Proceedings of the IX Intern. sci. conf. "Innovation, environment and resource-saving technologies at the enterprises of mechanical engineering, aerospace, transportation and agriculture"*). Rostov-na-Donu, IC DGTU, 2010. PP. 310 - 315.

6. Teterevleva E.V. Problemy rascheta i imitatsii dinamicheskikh protsessov transportirovki gaza magistral'nymi truboprovodami (Problem of calculation and simulation of dynamic processes of gas transportation through main pipelines), *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh – MMTT-21. Sb. trudov XXI Mezhd. nauch. konf.* (*Mathematical Methods in Equipment and Technologies – MMET- 1. Proceedings of the XXI intern. sci. conf.*). In 11 volumes. Vol. 6. Saratov, SGTU, 2008. PP. 16 - 18.