

## **ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗРАБОТКИ НЕФТЕГАЗОВЫХ ЗАЛЕЖЕЙ**

Соколов В.А.

*Ухтинский государственный технический университет*

*Холистический (то есть целостный подход) к рассмотрению процесса разработки нефтегазовых залежей позволяет рассматривать эволюционные уравнения динамики пластовых систем в качестве феноменологических (феноменология - учение о явлении в целом) моделей. Это позволяет увеличить глубину прогноза основных показателей разработки. Приведены многочисленные примеры как линейных, так и нелинейных, как автономных, так и неавтономных моделей, апробированных на примере разработки различных залежей Тимано-Печорской нефтегазоносной провинции.*

### **Введение**

В настоящее время значительно изменяются взгляды на процессы, происходящие в нефтегазовых пластах при их разработке. Это связано со становлением новой научной картины мира, которая сегодня строится на основе универсального эволюционизма, объединяющего идеи системного и эволюционного подходов. «Происходит экстраполяция идей биологической эволюции в астрономию и геологию, на все сферы действительности, на неживую, живую и социальную материи. Это приводит к необходимости рассматривать объекты не просто как системы, а как открытые самоорганизующиеся системы. Современные концепции самоорганизации позволяют разрешить противоречие между теорией биологической эволюции и термодинамикой. Впервые возникает научно обоснованная возможность преодолеть традиционный разрыв между представлениями о живой и неживой природе» [1].

«...Естественнонаучная картина мира должна быть биологической (до недавнего прошлого фундаментом картины мира служили законы сохранения), потому что физическая картина мира представляет собой более упрощённый вариант. Все физико-химические процессы наблюдаются в биологии, а общая

картина мира должна быть ориентирована на науки высшего, а не низшего уровня» [2].

Приведём высказывания академика А. Субетто, взятое из [3]: «Наступил момент, когда можно выдвигать гипотезу, что «материя» в каком-то смысле «живая», что косной материи как пассивной не существует, что синергетические процессы самоорганизации на основе обмена с внешней средой всеобщие».

«Исследование процессов эволюции привнесли в физику новое мышление и новый метод работы, которые до этого были достоянием только биологических и общественных наук: историческое мышление и исторический метод. Эволюция по самой своей сути является историческим процессом. Результаты эволюционных процессов, как правило, могут быть поняты не из их мгновенного состояния, а лишь на основе исследования истории их возникновения. Отчетливо виден междисциплинарный характер физики самоорганизации. Физик Хакен предложил для новой области науки название синергетика» [4].

Ограничимся этими высказываниями, ибо цитат в этом направлении можно привести много.

Процесс разработки нефтегазовых залежей, как и цветок, также можно изучать «живым», в целом. Этот холистический (т.е. целостный) подход позволяет эволюционные уравнения разработки рассматривать в качестве феноменологических (феноменология – учение о явлении в целом) моделей, позволяющих увеличить глубину прогнозов в этой области.

Обоснуем в этой статье некоторые из таких моделей.

### **Обоснование экспоненциальной модели для описания и прогнозирования начальных этапов разработки нефтегазовых залежей**

Если обоснование модели вести в терминах демографии, то простейшей моделью роста населения, например на планете Земля, будет так называемая модель нормального размножения, предложенная Мальтусом в 1798 г., и поэтому называемая еще мальтузианской моделью. Это, видимо, одна из первых и простейших моделей, которые в состоянии предложить математика демографии (если не считать знаменитый ряд Фибоначчи, который приводит в своём труде

Леонардо из Пизы ещё в XIII веке). В виде дифференциального уравнения этот закон имеет следующий вид

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (1)$$

где  $x$  – это число особей в популяции.

Смысл этой модели в том, что относительная скорость роста популяции  $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$  равна постоянной  $a$ . Численность популяция растёт (при  $a > 0$ ), если нет ограничивающих факторов, поскольку каждая популяция любыми способами стремится выжить и детерминировано, т.е. предопределенно, исключая всякие случайности, увеличить свою численность. Запомним это детерминированное стремление популяции к увеличению своей численности. Итак, величина  $x$  (то есть знаменатель у относительной скорости роста) увеличивается, а значит и сама абсолютная скорость роста (т. е. величина  $\frac{dx}{dt}$ ) должна также увеличиться, чтобы их отношение, т. е. величина  $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$ , осталась постоянной. Это приводит к постоянной относительной скорости роста и к экспоненциальному увеличению численности.

Признаком действия экспоненциальной модели может служить то, что численность удваивается за один и тот же промежуток времени. Действительно, если решить дифференциальное уравнение (1), то получим:  $x(t) = x_0 \cdot \exp[a(t - t_0)]$ . Пусть в момент времени  $t_0$  численность популяции равна  $x_0$ , в момент  $t_1 = t_0 + \Delta t$  численность  $x_1 = x_0 \cdot \exp[a(t_1 - t_0)] = x_0 \cdot \exp[a\Delta t]$ , в момент  $t_2 = t_0 + 2\Delta t$  численность  $x_2 = x_0 \cdot \exp[a(t_2 - t_0)] = x_0 \cdot \exp[a \cdot 2\Delta t]$  и так далее. Ясно, что за равные интервалы времени  $\Delta t$  численность популяции на каждом шаге будет увеличиваться в  $\exp(a\Delta t)$  раз. Если положить  $\exp(a\Delta t) = 2$ , т.е.  $\Delta t = \ln 2/a$ , то за данное  $\Delta t$  численность будет удваиваться.

Отметим, что этот закон описывает также процесс радиоактивного распада элементов. Эта же жесткая (т. е. с малым числом постоянных параметров и однозначным типом эволюции) модель (разумеется, с оговорками) применима,

например, для описания развития науки в 1700-1950 годах, если за  $x$  взять, скажем, число научных статей. Продолжение экспоненциального роста науки в следующем веке быстро привело бы к исчерпанию бумаги и чернил, причем число ученых должно было бы достичь половины населения земного шара. Поэтому ясно, что экспоненциальная модель может работать только на ограниченном, начальном отрезке развития системы, пока идет ее наиболее интенсивный рост и пока не вступили в силу подавляющие факторы.

Приведём теперь некоторые численные примеры. Для начала возьмём простой пример развития популяции микроорганизма *Pseudomonas aeruginosa*, известного в биологии. Развитие его происходит на ограниченной площади в условиях наличия неограниченного корма [5]. Данные роста представлены в табл. 1.

Если прологарифмировать уравнение (1), то мы получим уравнение прямой. Ясно, что фактические данные, представленные в координатах  $\ln(dx/dt) \div \ln(x)$  дадут прямую линию с единичным наклоном в случае, если закон (1) имеет место для развития данной популяции. Эта зависимость представлена на рис. 1. Из параметров линейного уравнения регрессии получаем ( $\alpha$  – угловой коэффициент прямой)  $\alpha = 0,9634 \approx 1$ ,  $a = \exp(-2,0765) = 0,1254$ .

Здесь и далее размерности коэффициентов моделей мы не даём, т.к. они очевидны из размерности исходных данных.

Видим, что примитивная биологическая популяция в нашем примере развивается по экспоненциальному закону  $\frac{dx}{dt} = 0,1254x$ .

Расчеты по данной модели представлены в той же табл. 1 и на рис. 2.

Теперь приведём данные по кинетике роста культуры *Methanobacterium tindaris* на среде с метанолом при 37°C и pH 7,0 [5]. Экспериментальные данные приведены в табл. 2. Обработка представлена в табл. 2 и на рис. 3. Сопоставление фактических и модельных данных – на рис. 4. Хорошо видна экспоненциальная фаза роста культуры, поскольку в условиях постоянства компонентов, необходимых для роста клеток, прогрессивное увеличение их числа носит автокаталитический (и одновременно экспоненциальный) характер. В замкнутой культуре фаза экспоненциального роста не может продолжаться бесконечно

долго. Она переходит в фазу линейного роста, а затем в фазу замедления роста, что и иллюстрирует рис. 4 в данном конкретном случае с популяцией *Methanobacterium tindaris*.

Таблица 1  
Рост популяции *Pseudomonas aeruginosa*

Часы	Численность (x), усл. ед.	$\frac{dx}{dt}$	$\ln\left(\frac{dx}{dt}\right)$	$\ln(x)$	Прогноз численности
0	0,03				
25	0,5	0,02	-3,97	-0,69	
44	3	0,13	-2,03	1,10	
50	12	1,50	0,41	2,48	
52	15	1,50	0,41	2,71	15,42
54	21	3,00	1,10	3,04	19,82
57	29	2,67	0,98	3,37	28,87
58	32	3,00	1,10	3,47	32,72
61	45	4,33	1,47	3,81	47,67
62	53	8,00	2,08	3,97	54,04
65	76	7,67	2,04	4,33	78,72

Таблица 2

Рост популяции *Methanobacterium tindaris*

Время, ч	Число микроорганизмов (x)	$\frac{dx}{dt}$	$\ln\left(\frac{dx}{dt}\right)$	$\ln(x)$	Прогноз численности
0	25900000				25900000
5	51600000	5140000	15,45256	17,7590322	51654754,93
10	108000000	11280000	16,23854	18,4976418	103019834,2
20	485000000	37700000	17,44517	19,9996594	409771669,6
25	849000000	72800000	18,10323	20,5595697	817245373,3
40	1320000000	31400000	17,26232	21,0008976	6483120511

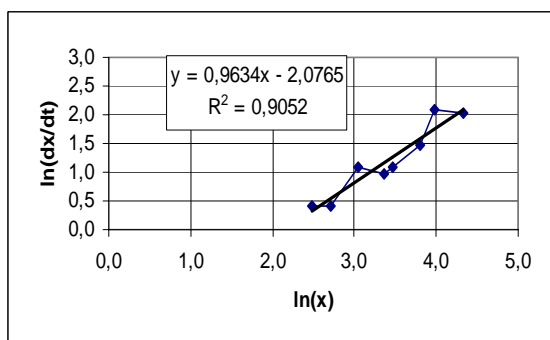


Рисунок 1. Зависимость  $\ln(dx/dt)$  от  $\ln(x)$  для динамики роста популяции *Pseudomonas aeruginosa*

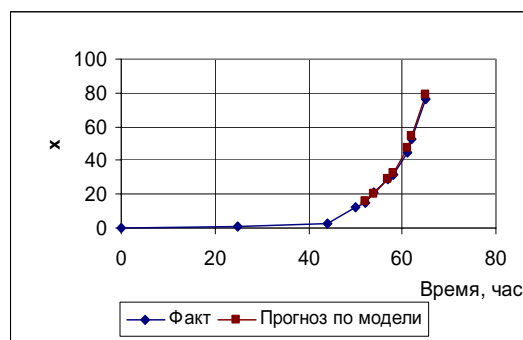


Рисунок 2. Сравнение фактической численности и расчетов по экспоненциальной модели во времени

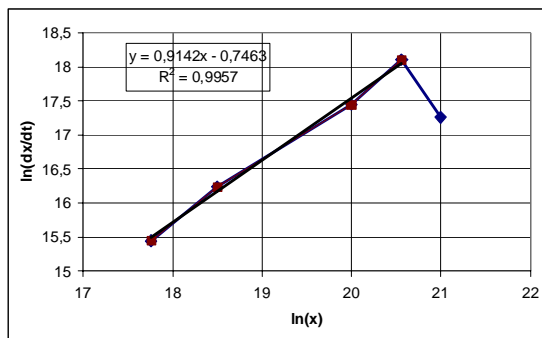


Рисунок 3. Зависимость  $\ln(dx/dt)$  от  $\ln(x)$  для динамики роста популяции *Methanobacterium tindaris*

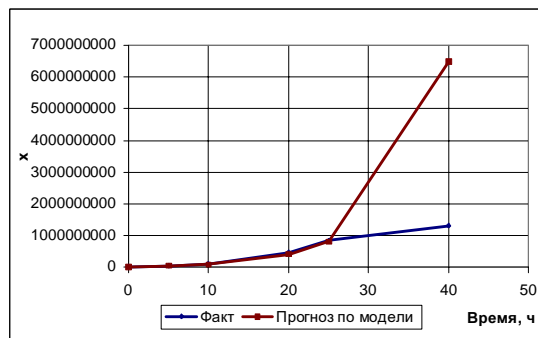


Рисунок 4. Сравнение фактической численности и расчетов по экспоненциальной модели во времени

Покажем теперь результаты моделирования по модели (1) уровней годовой добычи нефти в мире. В табл. 3 даны цифры годовых и накопленных (кумулятивных) отборов нефти в мире через 10 лет с 1900 по 1980 гг. [6]. На рис. 5 и рис. 7 представлены результаты обработки данных, а на рис. 6 и рис. 8 даны результаты этого простейшего моделирования.

Таблица 3

#### Динамика мировой добычи нефти

Годы	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980
Годовая добыча нефти, млн. т	19,8	44,9	94,3	193	294	521	1051	2290	2975
Накопленная добыча нефти, млн. т	258	592	1232	2818	5305	9158	17283	33830	61121

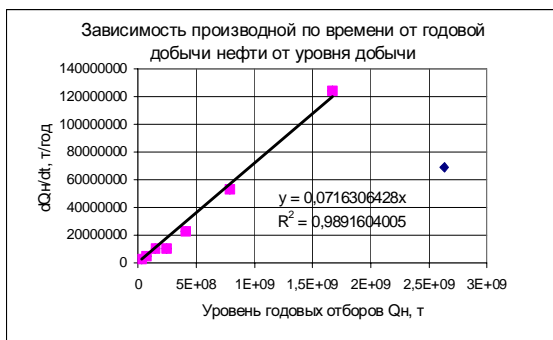


Рисунок 5. Определение параметров экспоненциальной модели для годовой добычи нефти

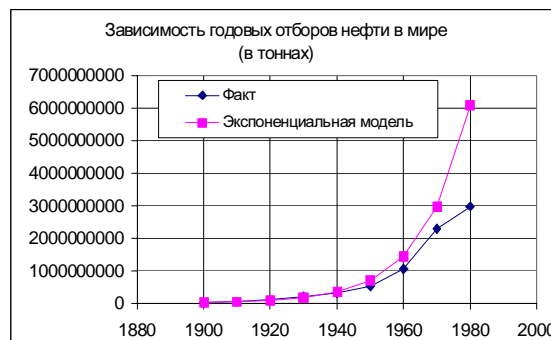


Рисунок 6. Интерполяция годовых отборов нефти по экспоненциальной модели



Рисунок 7. Определение параметров экспоненциальной модели для накопленных отборов

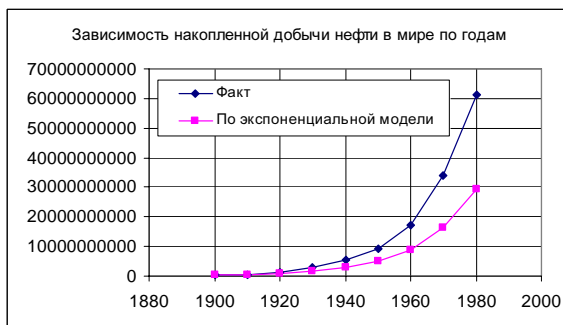


Рисунок 8. Интерполяция накопленных отборов по экспоненциальной модели

Таким образом, как показывает применение экспоненциальной модели в данном случае, для годовых и накопленных отборов нефти в мире экспоненциальный рост наблюдался только в самый начальный период.

Если через некоторый заданный интервал величина удваивает свое значение, то, как мы видели выше, ее развитие происходит экспоненциально. С другой стороны, если мы можем записать в некоторые дискретные моменты времени с равным шагом  $\Delta t$  последовательность величин  $x_0, 2x_0, 4x_0, 8x_0$  и т. д., то мы говорим, что имеется геометрическая прогрессия со знаменателем 2. В своей книге «Отечественная и мировая нефтедобыча» [6] В.Н. Щелкачев пишет: «с 1900 по 1970 гг. прошло 7 десятилетий, за пять из которых мировая добыча нефти возрастала вдвое или более чем вдвое, а за каждое из двух последних – только несколько более чем в полтора раза. Поэтому есть основание допустить, что в течение указанных 70 лет мировая добыча нефти практически возрастала в геометрической прогрессии со знаменателем 2».

Теперь дадим пример из сферы информационных технологий. На рис. 9 представлена динамика изменения числа сайтов мировой компьютерной сети  $N(t)$  (URL: <http://www.zakon.org/robert/internet/timeline/>). На рис. 10 дана ежемесячная зависимость логарифма числа сайтов  $N(t)$  с декабря 1990 г. Из этого рисунка видны три периода экспоненциального роста этого показателя, а рис. 11 иллюстрирует эти три модели.

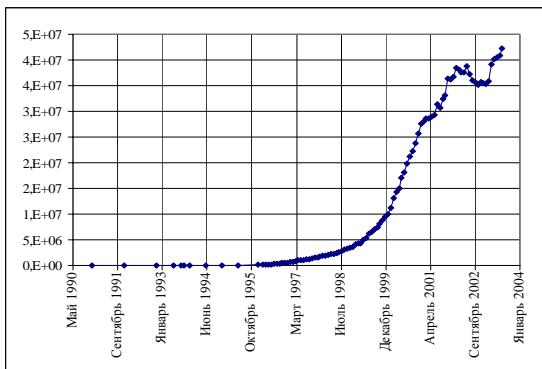


Рисунок 9. Динамика изменения числа сайтов мировой компьютерной сети  $N(t)$

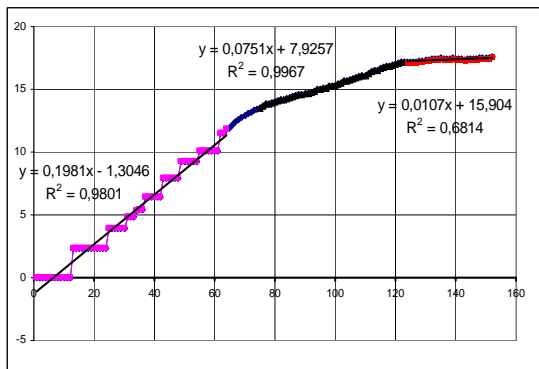


Рисунок 10. Зависимость логарифма числа сайтов во времени (по оси абсцисс даны номера месяцев, начиная с декабря 1990 г.)

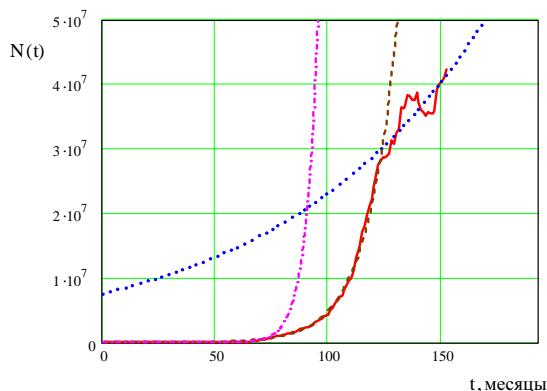


Рисунок 11. Моделирование динамики числа сайтов экспонентами на различных участках времени (по оси абсцисс даны номера месяцев, начиная с декабря 1990 г.)

Теперь обоснуем применение данной модели для прогнозирования показателей разработки нефтяных и газовых месторождений. Как известно, для получения заданных уровней отборов углеводородов из залежи производится ее интенсивное разбуривание для повышения как дифференциальных (т.е. в единицу времени), так и накопленных отборов нефти или газа. Т.е. люди стремятся детерминировано повысить уровень суммарных отборов. А такая стратегия, как мы видели раньше, соответствует поведению любой популяции и соответствующим образом отражается на ее численности. Поэтому при неограниченном количестве ресурсов (т.е. пока не включились механизмы подавления роста темпов добычи из-за интерференции скважин, снижения



пластовых давлений и т. д.) на начальном этапе рост накопленной добычи можно описывать экспоненциальной моделью вида

$$\frac{dV}{dt} = aV, \quad (2)$$

где  $V$  – это накопленные (кумулятивные) отборы нефти или газа, причем ясно, что  $\frac{dV}{dt} = Q$  – это дифференциальные (т.е. в единицу времени) отборы углеводородов или воды.

### **Обоснование логистической модели для описания и прогнозирования разработки нефтегазовых залежей**

Из разных областей знания известно, что рост социальных, экономических и технических систем очень часто носит так называемый логистический характер. К логистическому пути развития системы приходят, например, от первоначального экспоненциального роста после появления процессов подавления роста, его ограничения. Ограничивающими факторами роста, например добычи углеводородов из залежи, могут служить ограниченный фонд эксплуатационных скважин, их интерференция, особенности геологического строения залежи и т.д. Рост же числа людей на Земле ограничен условиями проживания, питания, экологическими факторами этого роста и т.д.

В целом, при логистическом развитии по сравнению со свободным экспоненциальным ростом, коэффициент в правой части (относительная скорость роста  $a$ ) по мере самого роста уменьшается. Рост начинает мешать самому росту. Поэтому запишем эволюционную модель теперь в следующем виде

$$\frac{dx}{dt} = a_1(x) \cdot x, \quad (3)$$

где  $a_1(x)$  – это теперь уже не постоянная величина, а функция от  $x$ .

Самая простая падающая зависимость – это линейная. Поэтому зададим зависимость  $a_1(x)$  просто в виде  $a_1(x) = a - bx$ . Подставив это выражение для  $a_1$  в уравнение (3), получим [7]

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad (4)$$

с нулевой неустойчивой особой точкой и ненулевой устойчивой стационарной

точкой [8]. Это и есть логистическая модель. Ее решением является характерная S-образная кривая, которую из-за универсальности часто называют просто кривой роста.

Явно выраженный логистический характер имеет зависимость накопленных отборов углеводородов, когда в качестве  $x$  принимается  $V$ . Приведем эти зависимости, например, для северного купола Вуктыльского НГКМ (рис. 12, рис. 13).

Поскольку  $\frac{dV}{dt}$  – это есть годовой отбор  $Q$ , то уравнение (4) в виде,

применимом для анализа разработки залежи, запишется так

$$Q = aV - bV^2, \quad (5)$$

или 
$$\frac{Q}{V} = a - bV. \quad (6)$$

Назовем зависимость  $Q/V$  от  $V$  логистической и представим ее для ВНКМ (рис. 14, рис. 15).



Рисунок 12. Накопленные отборы сухого газа по ВНКМ, млн. куб. м

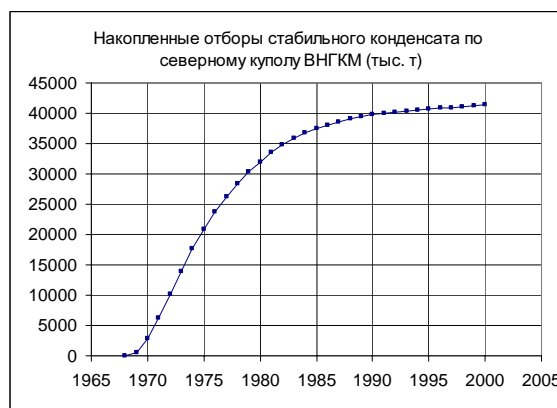


Рисунок 13. Накопленные отборы стабильного конденсата по ВНКМ, тыс. т

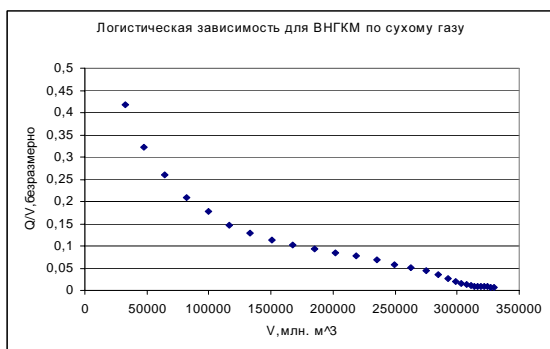


Рисунок 14. Логистическая зависимость для ВНКМ по сухому газу

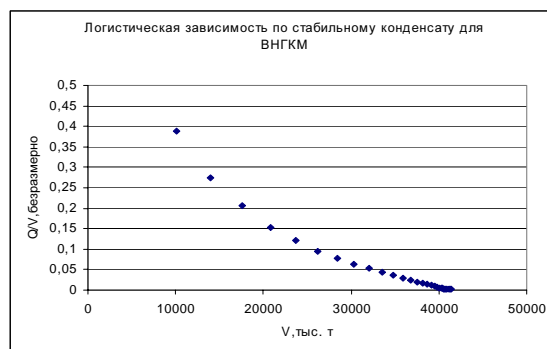


Рисунок 15. Логистическая зависимость для ВНКМ по стабильному конденсату

Таким образом, можно сделать вывод, что разработка нефтяной или газовой залежи может описываться первоначально экспоненциальной моделью роста, постепенно переходя в логистическую или какую-то другую, например, аллометрическую фазу роста.

### **Обоснование аллометрической модели, модели Кольрауша и гиперболических моделей типа Капицы-Баренблатта для описания и прогнозирования разработки залежей**

В биологии неизометрическое изменение размеров (scaling) часто называется аллометрическим (от греч. alloios – различный). Огромное число морфологических и физиологических переменных связано с размерами тела зависимостью, выраженной общей формой аллометрических уравнений  $y = ax^b$ , или  $\ln y = \ln a + b \ln x$ .

Эта же зависимость обнаруживается и для объема крови у млекопитающих. Из последнего уравнения ясно, что если наклон прямой в координатах  $\ln y$  ÷  $\ln x$  единичен, то мы имеем дело с обычной пропорциональностью. С увеличением размеров скелет крупных животных увеличивается не пропорционально увеличению массы тела, а быстрее, что выражается в увеличении наклона прямой относительно единицы.

Интенсивность метаболизма (обмена веществ) растёт с увеличением размера тела медленнее, чем при прямой пропорциональности. В этом случае наклон линии регрессии будет меньше единицы.

Таким образом, аллометрическая модель описывает эволюционные процессы неравномерного роста во времени.

Перейдем к этой модели и мы, постепенно усложняя эволюционные уравнения. Мы начали статью с хорошо известной всем со школы экспоненциальной модели, а потом перешли от нее также к широко известному логистическому уравнению.

Итак, мы можем использовать для анализа и прогнозирования разработки следующие модели самого общего характера, применимые во многих областях.

1. Абсолютная скорость роста равна нулю. Тогда можно записать

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad x(t) - x(t_0) = 0, \quad x(t) = a.$$

2. Абсолютная скорость роста постоянна. Тогда  $\frac{dx}{dt} = a$ ,  $x(t) - x(t_0) = a(t - t_0)$ , а

при  $t_0 = 0$  будем иметь  $x(t) = x_0 + at$ , т.е. случай простого линейного роста популяции (системы).

3. Относительная скорость роста постоянна. Тогда  $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a$ ,  $x(t) = x_0 \cdot e^{a(t-t_0)}$ , т.е.

модель нелимитируемого экспоненциального роста.

4. Относительная скорость роста линейно падает. Тогда  $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$ ,

$$x(t) = \frac{x_0 x_{\max} e^{bx_{\max} t}}{x_{\max} - x_0 + x_0 e^{bx_{\max} t}}, \quad \text{имеем симметричную логистическую модель,}$$

например, подавляемого роста ( $x_0 < x_{\max}$ ).

5. Относительная скорость роста обратно пропорциональна времени. Тогда

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{a}{t}, \quad x(t) = x_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^a, \quad \text{т.е. имеем аллометрическую модель неоднородного}$$

(гетерогенного) роста во времени. Отличительной особенностью этого роста является наличие падающей прямой, в соответствии с уравнением

$$\ln \left[ \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} \right] = \ln a - \ln t, \quad \text{в координатах } \ln \left[ \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} \right] \div \ln t \quad \text{с единичным по}$$

абсолютной величине наклоном.

6. Относительная скорость роста обратно пропорциональна времени в некоторой

положительной степени. Тогда  $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{a}{t^b}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ , при  $t_0 = 0$

имеем  $x = x_0 \cdot \exp \left[ a(b-1)/t^{b-1} \right]$ , т.е. закон Кольрауша или закон растянутой во времени экспоненты.

Аллометрическая модель часто имеет место для начальных периодов разработки нефтяных и газовых месторождений (см. табл. 5). Например, для зависимости отборов промыслового газа на ВНКМ эта модель (или близкая к

ней) была справедлива (как следует из рис. 16) в самом начале разработки (первые 6 месяцев) и в самом конце (в период закачки сухого газа на опытных участках).

Теперь приведем примеры использования модели Кольрауша [9], записав её для накопленных отборов в виде

$$\frac{dV}{dt} = at^m V, \quad a > 0, \quad m < 0, \quad m \neq 1. \quad (7)$$

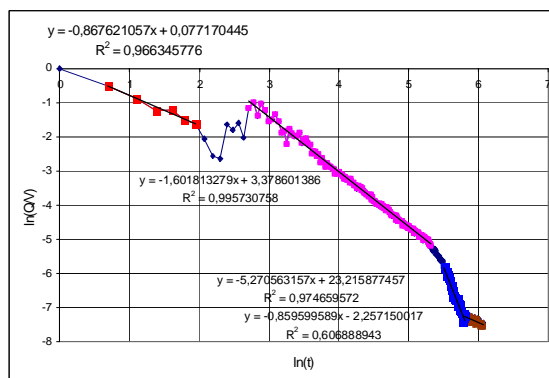


Рисунок 16. Зависимость ежемесячных отборов промыслового газа по ВНКМ в координатах  $\ln(Q/V)$  от  $\ln(t)$

Ясно, что в координатах  $\ln(Q/V)$  от  $\ln(t)$  исходные данные спрямляются в случае, если модель (7) верна. Фактические данные для ежемесячной добычи промыслового газа по ВНКМ в этих координатах даны на рис. 16.

Видно, что выделяются четыре прямолинейных участка с отрицательными наклонами. Первый по ходу времени самый короткий участок в 7 месяцев (с 1 по 7 точку) даёт параметры модели  $a = \exp(0.07717) = 1.0802$  и  $m = -0.8676$  (что близко к  $-1$ , т.е. к аллометрической модели); второй из выделенных на рисунке прямолинейных участков с 15 примерно по 170 точку даёт значения параметров  $a = \exp(3.3786) = 29.32968$  и  $m = -1.60181$ ; третий участок примерно с 240 по 319 точку даёт  $a = \exp(23.215877) = 12092811233$  и  $m = -5.27056$ ; наконец последний четвёртый участок с 345 по 434 точку даёт  $a = \exp(-2.25715) = 0.104648$  и  $m = -0.8596$  (что снова близко к  $-1$ ).

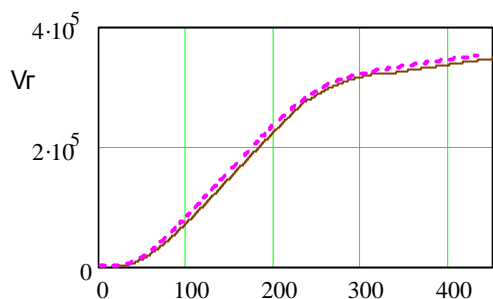
Таким образом, модель (7) хорошо описывает промысловые данные по отборам газа на ВНКМ на отдельных участках, а, следовательно, может быть рекомендована как адекватная и проверенная модель для прогнозов в случаях разработки залежей, аналогичных Вуктыльской.

Кроме того, модель (7) позволяет взглянуть на разработку с позиций анализа надежности технических систем, при котором весь интервал «жизни» системы разбивается на три периода. Первый период, когда коэффициент смертности велик из-за дефектов сборки, некондиционности отдельных элементов и т.д., принято называть [10] периодом «приработки» (или «обкатки»). Второй период характеризуется сравнительно низким уровнем «смертности» элементов (в основном из-за аварий или несчастных случаев), не зависящим от возраста системы, и называется периодом нормальной эксплуатации. И, наконец, последний период жизни (или эксплуатации) системы – период старения и износа. Природа отказов здесь – это ухудшение качества элементов системы. Такая ситуация очень широко распространена. Это объясняет то, что при анализе фактических данных о работе самых различных систем часто встречается распределения экспоненциальное, Вейбулла и Парето. Проведенный в настоящей работе анализ разработки ВНКМ с помощью модели Кольрауша показал, что период «приработки» (первый из выделенных прямолинейных участков на рис. 16 плюс следующие семь-восемь месяцев «свистопляски») на ВНКМ равнялся 15 месяцам. Следующий за ним период нормальной эксплуатации длился приблизительно 155 месяцев (с 15 по 170 точку) и включал в себя в основном период нарастающей и постоянной добычи. Наконец, период старения и износа длился примерно 80 месяцев (с 240 по 319 точку). Самый последний прямолинейный участок (четвертый на рис. 16) отражает тот факт, что примерно с 345 точки (июль 1996 г.), а считая переходной период то и несколько раньше, на Вуктыле началась «новая жизнь» в связи с закачкой сухого тюменского газа из проходящего мимо магистрального газопровода для испарения и извлечения ретроградного конденсата из пласта.

Теперь аппроксимируем полученные параметры ступенчатыми функциями. Эти громоздкие, но простые по сути аппроксимации мы не приводим. Численное решение уравнения (7) с найденными ступенчатыми аппроксимациями параметров относительно накопленной добычи  $V$  приведено на рис. 17, а результаты расчетов дифференциальной добычи  $Q = dV/dt$  – на рис. 18.

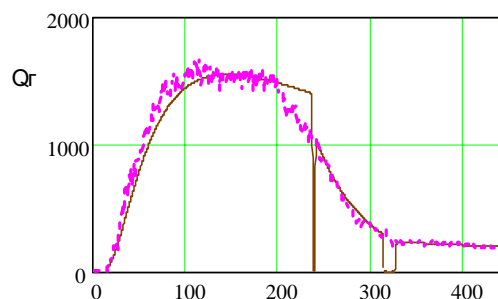
Теперь перейдем к обоснованию гиперболических эволюционных уравнений в разработке. Сделаем это сначала на самых простых моделях. В

настоящее время применительно к разработке нефтяных и газовых месторождений эти модели с физически обоснованной асимптотикой называются моделями типа Капицы-Баренблатта [11, 12, 13].



Время разработки, мес

Рисунок 17. Сравнение фактических данных по накопленной добыче промыслового газа с расчетными по модели (7) для ВНГKM (млн. м<sup>3</sup>)



Время разработки, мес

Рисунок 18. Сравнение фактических дифференциальных ежемесячных отборов промыслового газа с расчетными по модели (7) для ВНГKM (млн. м<sup>3</sup>/мес)

Если взять простую гиперболическую зависимость во времени  $x(t) = \frac{10}{t}$ ,

то она имеет вид, представленный на рис. 19. Теперь усложним модель. Возьмем

ее в виде  $x(t) = \frac{10}{t - t_k}$ , где  $t_k$  – константа, имеющая размерность времени, которую

назовем моментом катастрофы. Пусть, например, наш процесс терпит «катастрофу» в момент  $t_k=5$  (рис. 20).

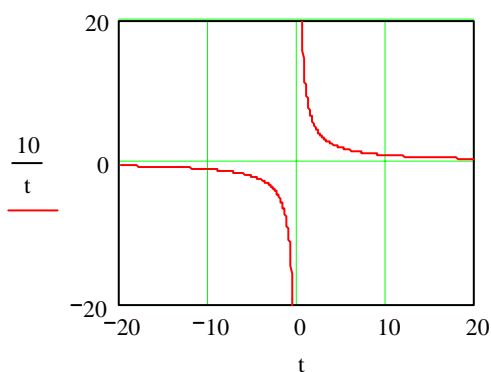


Рисунок 19

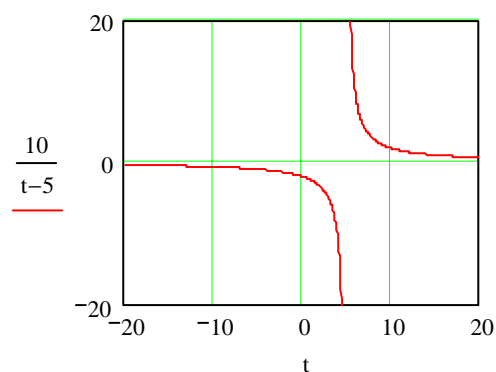


Рисунок 20

Нарисуем графически также и модель вида  $x(t) = \frac{10}{t_k - t}$  (рис. 21).

Момент  $t_k$  называется моментом «катастрофы» из-за того, что, как видим, в этот момент времени происходит увеличение или уменьшение величины  $x$  до бесконечности. По признаку перехода режима на период быстро растущей гиперболичности (т.е. на так называемый режим с обострением) можно, например, прогнозировать момент обвала курса валюты. Прогноз этот можно сделать, например, по вышеприведенной простейшей модели, поскольку ясно, что в координатах  $\frac{1}{x}$  от  $t$  мы будем иметь прямую, проходящую в момент  $t = t_k$  через

нуль (рис. 22), поскольку  $\frac{1}{x} = \frac{t-5}{10}$ .

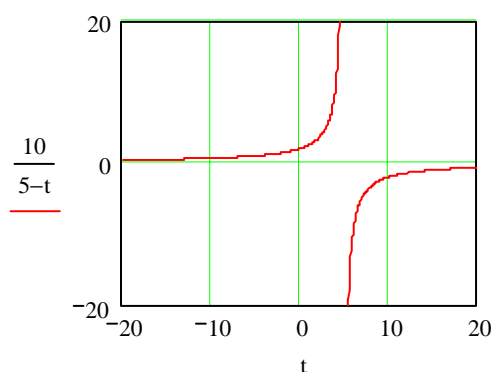


Рисунок 21

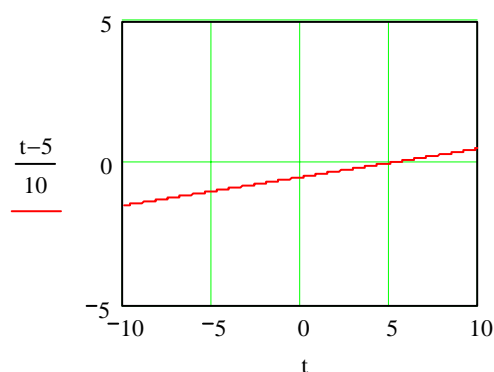


Рисунок 22

Гипербола имеет самое широкое распространение в жизни, поскольку она, как и прямая линия, самоподобна. Известно, что пористые среды (в частности трещиноватые) имеют геометрически самоподобную (фрактальную, дендро- или древовидную) структуру. Гиперболический рост является приемлемой моделью и для анализа динамики роста накопленных или дифференциальных (например, ежемесячных) отборов газа. Для того, чтобы это понять, возведем правую часть нашей модели в четную степень (см. рис. 23).

Динамика такой модели представлена на рис. 24.

Наконец, увеличивая четную степень в знаменателе правой части можно получить характерное «плато» в развитии системы (рис. 25).

Скорость развития различных процессов в природе носит такой же характер как показано на рис. 25, т.е. имеются три характерных периода развития, а именно ускоренного роста, стабильного и затухающего до нуля. Интеграл от скорости роста даст накопленный показатель процесса (см. рисунок 26).



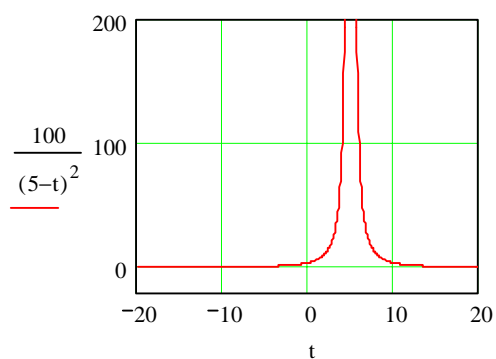


Рисунок 23

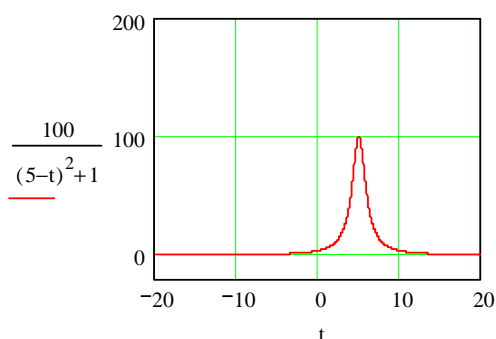


Рисунок 24

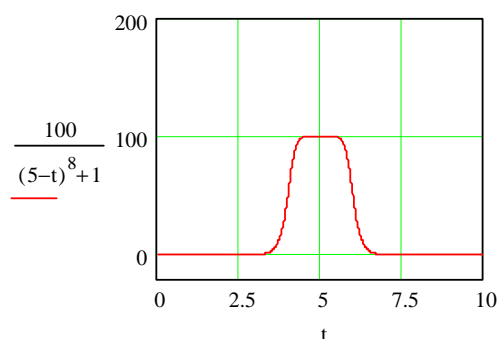


Рисунок 25

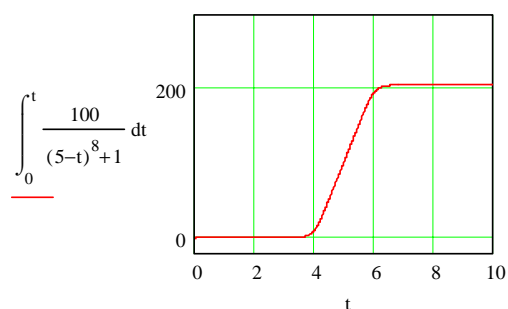


Рисунок 26

При разработке газовых месторождений показателем скорости роста системы являются дифференциальные отборы газа из залежи (например, ежемесячные)  $Q(t)$ , а интегральной характеристикой является накопленная добыча  $V(t)$  (или в газовой литературе  $Q_{доб}(t)$ ).

Крупное по запасам газовое месторождение проходит в своем развитии три стадии – это период нарастающей, постоянной и падающей добычи. Поэтому

исходя из вышеизложенных разъяснений понятно, что даже несложная симметричная модель вида

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q(t) = \frac{a}{(t-b)^c + d} + g \quad (8)$$

должна уже в принципе достаточно неплохо описывать эволюцию разработки крупного газового месторождения.

Рассмотрим пример разработки ВНГКМ. Представим сравнение фактических данных с результатами расчётов по модели (8). Параметры модели определялись методом наименьших квадратов в соответствующих координатах (эта процедура занимает достаточно много места при её описании, поэтому в данной работе она опущена как несущественная) и оказались равными:  $a=8 \cdot 10^{14}$ ,  $b=142$ ,  $c=6$ ,  $d=59 \cdot 10^{10}$ ,  $g=175$ . Параметр  $g$  – это просто постоянная величина, которая добавляется аддитивно в правую часть модели (8) и на которую вся зависимость просто приподнимается над осью абсцисс. Результаты сравнения фактических и расчетных показателей приводятся на рис. 27, рис. 28.

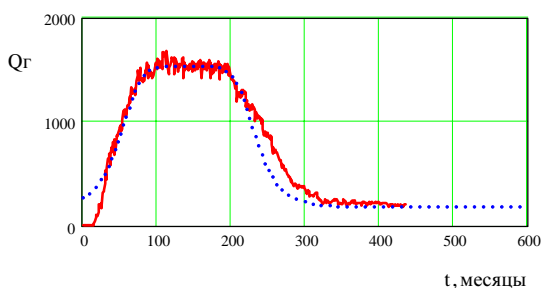


Рисунок 27. Сравнение динамики расчетных и фактических ежемесячных отборов промышленного газа на ВНГКМ

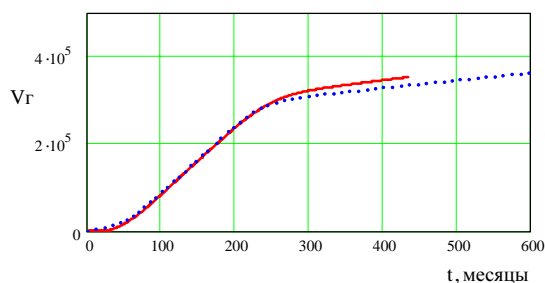


Рисунок 28. Сравнение динамики расчетных и фактических накопленных отборов промышленного газа на ВНГКМ

Из рис. 27, рис. 28 видно, что уже простая модель (8) даёт качественно верную сходимость с фактом. Смысл параметров, как мы уже это видели на простейших моделях в начале этапа, следующий:  $a$  отвечает за общую амплитуду модельной кривой,  $b$  задает момент «катастрофы» (в нашем случае – это центр симметрии кривой) определяя расположение кривой на оси абсцисс,  $c$  отвечает за форму кривой,  $d$  – регуляризатор модели,  $g$  приподнимает всю зависимость над осью абсцисс.

Для придания модели большей гибкости, запишем ее в таком виде

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q(t) = \frac{a}{[(t-b)^c + d]^k} + g, \quad (9)$$

где введённая степень у знаменателя  $k$  служит для дополнительного влияния на форму кривой. На рис. 29, рис. 30 дано сравнение фактических данных с расчетами на модели (9) со следующими, определёнными нами методом наименьших квадратов, параметрами:  $a=22 \cdot 10^7$ ,  $b=136$ ,  $c=6$ ,  $d=4 \cdot 10^{11}$ ,  $g=169$ ,  $k=0.45$ .

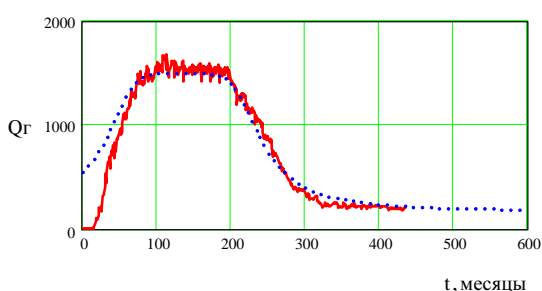


Рисунок 29. Сравнение динамики рассчитанных по модели (9) и фактических ежемесячных отборов промышленного газа на ВНКМ

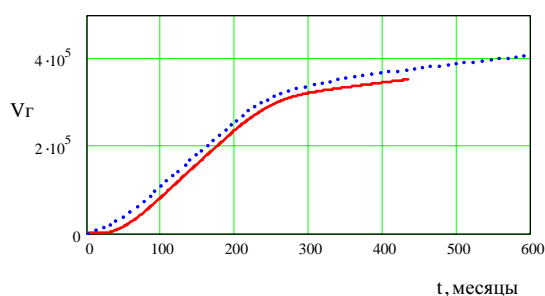


Рисунок 30. Сравнение динамики рассчитанных по модели (9) и фактических накопленных отборов промышленного газа на ВНКМ

Как видно из рис. 29, рис. 30 введенная степень у знаменателя правой части модели  $k$  помогает влиять на форму кривой. Однако очевидно, что динамика разработки ВНКМ несимметрична, и симметричными моделями все периоды разработки описать нельзя.

Для окончательного описания разработки больших газовых месторождений на примере ВНКМ на данном этапе работ нами предлагается аддитивно-гиперболическая модель вида

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q(t) = \left[ \frac{a_1}{[(t-b_1)^{c_1} + d_1]^{k_1}} + g_1 \right] \cdot \alpha_1 + \left[ \frac{a_2}{[(t-b_2)^{c_2} + d_2]^{k_2}} + g_2 \right] \cdot \alpha_2, \quad (10)$$

в правой части которой суммируются две гиперболы, а мультипликативные коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  служат для изменения степени участия каждой в суммарном результате. На рис. 31, рис. 32 дается сравнение модельных кривых и фактических данных.

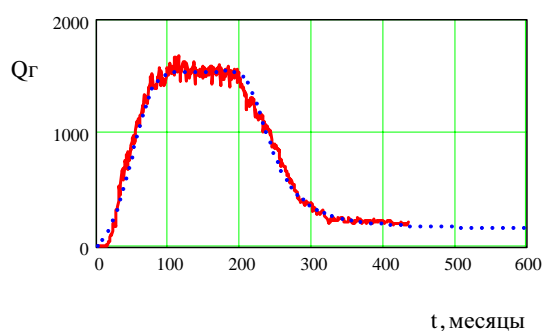


Рисунок 31. Сравнение динамики рассчитанных по модели (10) и фактических ежемесячных отборов промышленного газа на ВНКМ

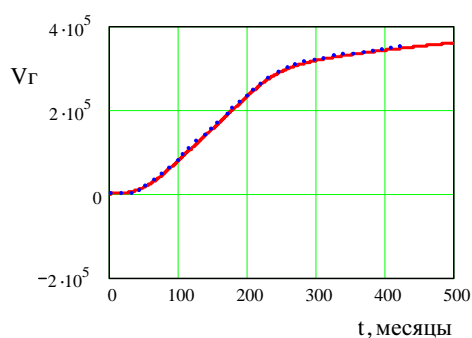


Рисунок 32. Сравнение динамики рассчитанных по модели (10) и фактических накопленных отборов промышленного газа на ВНКМ

На рис. 33, рис. 34 даны графики каждой гиперболы из правой части модели (10).

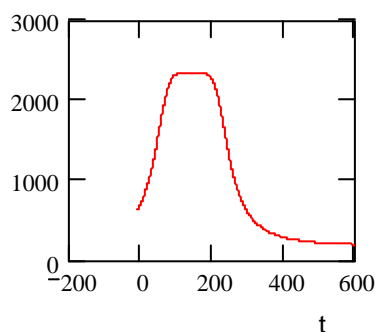


Рисунок 33. Динамика первой гиперболы из правой части модели (10)

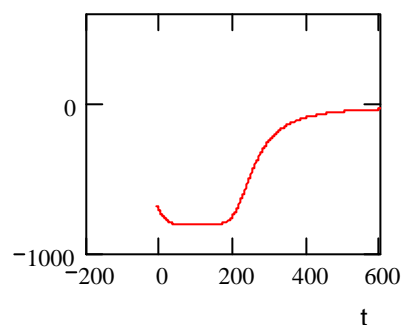


Рисунок 34. Динамика второй гиперболы (отрицательной) из правой части модели (10)

Как видно из рисунков, предлагаемая нами модель (10) достаточно хорошо описывает фактические данные разработки ВНКМ.

Теперь, убедившись, что эти модели хорошо работают при описании эволюции такого большого НКМ как Вуктыльское, приведём ещё ряд примеров из других областей для подчёркивания общности этого подхода.

С.П. Капица, в частности, применяет эту модель для долгосрочного прогнозирования численности людей на Земле [12]. Рассмотрим ее несколько подробнее. Гиперболическая модель роста получается, если относительная скорость роста пропорциональна численности популяции, т.е.

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = ax, \quad \frac{dx}{dt} = ax^2, \quad a > 0. \quad (11)$$

Мы видим, что в уравнении (11) скорость роста системы (популяции, накопленных отборов жидкости или газа и т.п.) очень высока при больших  $x$  (взрывная, например, рост числа людей на Земле) или замедленная при малых  $x$  (например, динамика численности китов, которым в современных условиях трудно найти себе пару), т.к. в правой части (11) происходит возведение  $x$  в квадрат. Закон эволюции системы по уравнению (11), т.е. решение уравнения (11), имеет вид

$$x(t) = \frac{1/a}{\left(\frac{1+ax_0t_0}{ax_0}\right)^{-t}}$$

Последнее выражение при  $t_0 = 0$  приводится к виду  $x(t) = \frac{1/a}{\left(\frac{1}{ax_0}\right)^{-t}}$ .

Для популяции *H. Sapiens* С.П. Капица в качестве  $x$  принимает численность людей на планете  $n$ . Отвлекаясь от особенностей развития человека на различных континентах, расовых и половых различий и т.д., он получает модель вида (сходную с более ранними моделями других авторов)  $n(t) = \frac{200 \cdot 10^9}{2025 - t}$ . Это характерная для больших систем эволюция, т.к. известно, что большие системы проявляют особый, катастрофический характер эволюции (т.е. режимы развития с обострением).

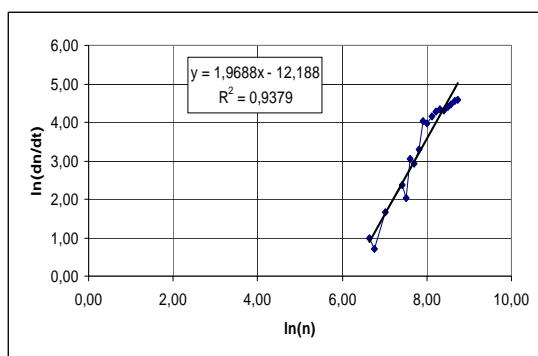


Рисунок 35. Зависимость  $\ln(dn/dt)$  от  $\ln(n)$  для популяции *Homo Sapiens*

Таким образом, Капица принимает в качестве ведущей синергетической переменной порядка очень большой и сложно функционирующей системы – нашей планеты – просто численность всех людей на Земле. Согласно последней

модели, при  $t = 2025$ , т.е. в 2025 г., население Земли станет бесконечно большим. Этот момент времени называют поэтому еще моментом обострения или «катастрофы»  $t_k$ . На рис. 35 дана обработка численности Homo Sapiens. По коэффициентам линейного уравнения регрессии получим параметры модели (11) ( $a$  – угловой коэффициент прямой)  $\alpha = 1,9688 \approx 2$ ,  $a = \exp(-12,188) = 5,091 \cdot 10^{-6}$ .

Поскольку угловой коэффициент прямой на рис. 35 равен двум, то для начального этапа развития численности людей на Земле подходит модель вида

$$\frac{dn}{dt} = an^2, \text{ где } a \cong 5,091 \cdot 10^{-6}.$$

Решением этого уравнения и будет модель Капицы

$$n(t) = \frac{196425}{\frac{1}{(5,091 \cdot 10^{-6})(160)}^{-t}} \cong \frac{200 \cdot 10^3}{1228 - t}.$$

Если численность людей на Земле брать не в млн. человек, а в единицах человек, дифференцирование произвести не так грубо, как мы это сделали для оценок, то мы и получим модель Капицы в виде, принятом им окончательно,

$$n(t) = \frac{200 \cdot 10^9}{2025 - t}.$$

По результатам наших оценочных расчетов мы уже видим, что характер развития популяции людей идет по совершенно иной модели, нежели простейших биологических организмов. У простейших мы наблюдали экспоненциальный рост, а у H. Sapiens – гиперболический. Основное отличие в том, что экспонента стремится к бесконечности при бесконечном времени, а гипербола – как мы видели – при конечном времени  $t_k$ . Такой закон отражает кооперативный характер роста популяции человека [5].

Сравнения фактических и модельных данных для Homo Sapiens даны на рис. 36.

Естественно, что численность населения на Земле никогда не станет бесконечно большой. Из-за влияния ограничивающих факторов самого различного свойства модели, пригодные для длительных реальных прогнозов, должны эти ограничения учитывать. Простейшей моделью, учитывающей ограничения роста популяции из-за влияния различных факторов, как мы уже

видели, является логистическая модель. Ясно, что в координатах  $\frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dt} = a - bn$  эта модель становится линейной.

Обработка фактических данных в координатах  $\frac{1}{n} \cdot \left( \frac{dn}{dt} \right) \div n$  представлена на рис. 37, рис. 38. Параметры логистической модели будут следующими:  $a = 2,4 \cdot 10^{-2}$ ;  $b = 1,38 \cdot 10^{-6}$ . Следовательно, логистическая модель будет такой:  $\frac{dn}{dt} = an - bn^2$ ,  $a = 2,4 \cdot 10^{-2}$ ,  $b = 1,38 \cdot 10^{-6}$ . Прогноз по логистической модели с найденными параметрами  $a$  и  $b$  дан на рис. 39.

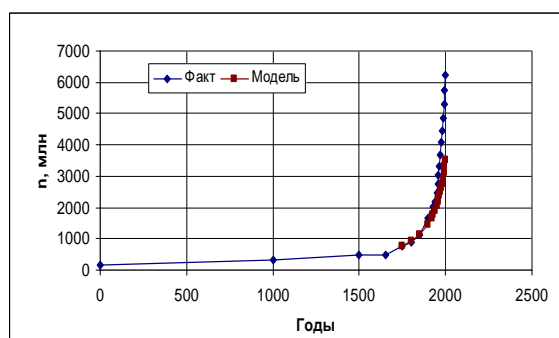


Рисунок 36. Динамика численности Н. Sapiens фактическая и модельная

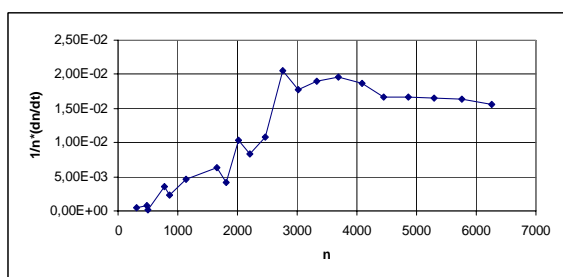


Рисунок 37. Зависимость  $\frac{1}{n} \left( \frac{dn}{dt} \right)$  от  $n$  для популяции Номо Sapiens

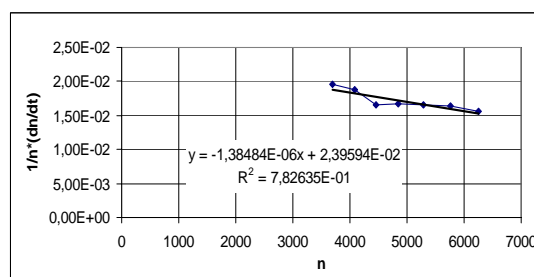


Рисунок 38. Зависимость  $\frac{1}{n} \left( \frac{dn}{dt} \right)$  от  $n$  для популяции Номо Sapiens (конечный линейный участок)

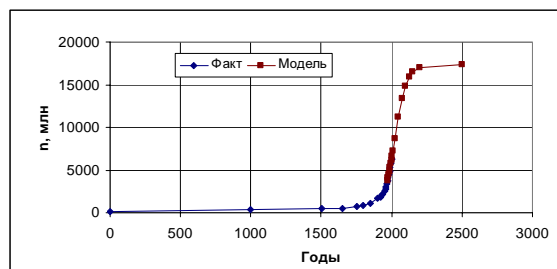


Рисунок 39. Динамика фактической численности населения Земли и прогноз по логистической модели

Видим, что происходит стабилизация населения после 2025 г. на уровне около 17 млрд. человек. Этот переход к стабильной численности людей на Земле из-за подавляющих факторов называют вторым демографическим переходом (первый – это резкое увеличение численности людей, связанное с изобретением паровой машины, т.е. первой технической революцией).

Другой возможной моделью описания больших систем является модель Капицы-Баренблатта, учитывающая характерные особенности промежуточной асимптотики рассмотренного процесса размножения:

$$\frac{dn}{dt} = c \left[ (T_1 - t)^2 + \tau^2 \right]^\alpha,$$

где  $c > 0$ ,  $T_1 > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $\alpha < 0$ .

Поскольку  $\alpha < 0$ , то при  $\tau = 0$  эта модель также при  $t = T_1$  давала бы бесконечно большую скорость роста популяции. Поэтому  $T_1$  принимается равным 2025 – момент «катастрофы»  $t_k$ . Параметр  $\tau^2$  у С.П. Капицы играет роль регуляризатора решения и введен для того, чтобы и в переходной момент (момент «катастрофы»  $t_k = 2025$ ) скорость роста не обращалась в бесконечность.

Ясно, что для определения параметров модели исходные данные надо представить в координатах  $\ln(dn/dt)$  от  $\ln \left[ (T_1 - t)^2 + \tau^2 \right]$ . Обработка в этих координатах дана на рис. 40. Параметры модели: принятые из опыта исследований численности людей на Земле –  $T_1 = 2025$ ,  $\tau = 46$  (продолжительность жизни 1 поколения); найденные из рис. 40 –  $\alpha = -\exp(15,099) = 1,3048$ ,  $c = 3609212$ . Сравнение фактических данных и прогноза дано на рис. 41. По данной модели стабилизация населения Земли происходит приблизительно на уровне 16 млрд. человек.



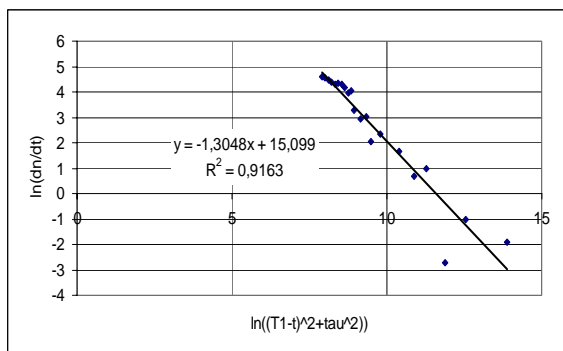


Рисунок 40. Обработка исходных данных в координатах  $\ln(dn/dt)$  от  $\ln[(T_1 - t)^2 + \tau^2]$

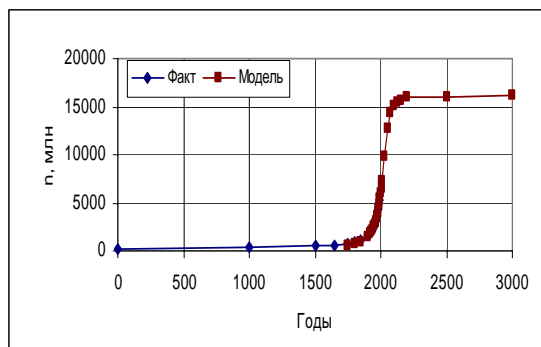


Рисунок 41. Сопоставление фактических данных и прогноза по модели  $dn/dt = c[(T_1 - t)^2 + \tau^2]^\alpha$ .

Теперь проанализируем демографическую ситуацию в нашей Республике Коми. Для прогноза примем ту же модель Капицы-Баренблатта  $dn/dt = c[(t_k - t)^2 + \tau^2]^\alpha$ . Найдем значение  $t_k$ , т.е. момента времени, когда численность населения становится бесконечной в модели  $n = A/(t_k - t)$ . Его нахождение можно найти из уравнения  $t = t_k - A/n$ .

На рис. 42 дана численность населения Коми, а на рис. 43 – обратная численность по годам для нахождения момента  $t_k$ .

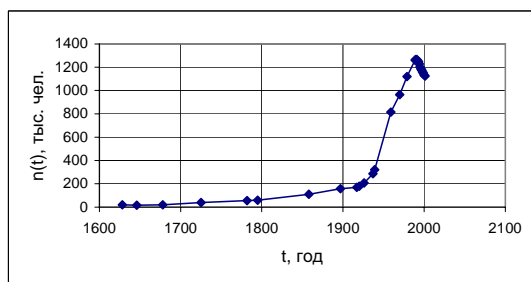


Рисунок 42. Фактическая численность населения Республики Коми (в тыс. чел.) во времени

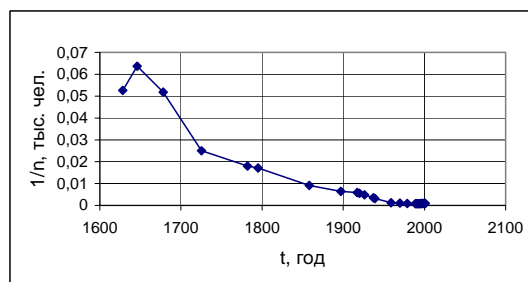


Рисунок 43. Динамика величины  $(1/n)$  по годам

На рис. 44 и рис. 45 дана динамика обратной численности населения Коми в других масштабах.

Видно, что обратная численность имеет много прямолинейных участков и в целом нелинейна, т. е. на каждом интервале может быть свое значение параметра  $t_k$ . Поскольку нас интересует прогноз вперед, то определим параметр  $t_k$  по последнему прямолинейному участку перед началом убыли населения, т. е. по

данным за 1959, 1970 и 1979 гг. (рис. 44). По этим годам, как следует из регрессионной зависимости на рис. 44, параметр  $t_k$  определяется величиной 2033. Заметим, что для всего населения Земли он составляет на сегодняшний день (как мы уже видели) величину 2025. Таким образом, для республики Коми и для всей Земли на сегодняшний день «моменты катастроф» согласуются.

Определение параметров модели Капицы-Баренблатта проведено согласно рис. 46.

Прогноз по данной модели проводился при параметре регуляризации  $\tau$ , равном 46 годам, т. е. он взят по величине равным периоду активной жизни человека, как это сделано С.П. Капицей в целом для Земли. Результаты прогноза даны на рис. 47 совместно с фактическими данными.

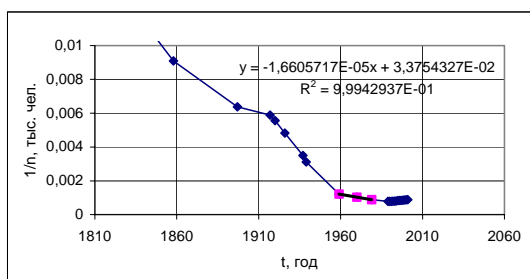


Рисунок 44. Динамика величины  $(1/n)$  по годам (выделены три точки, по которым определяется тренд)

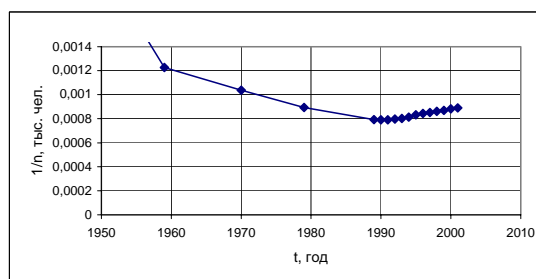


Рисунок 45. Конечный участок зависимости  $(1/n)$  во времени

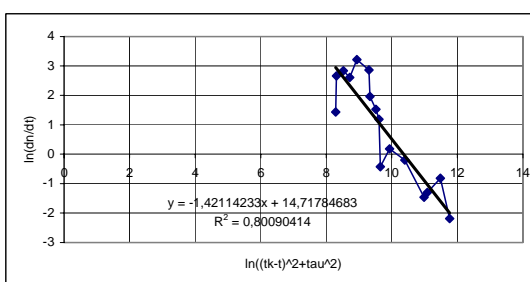


Рисунок 46. Зависимость  $\ln(dn/dt)$  от  $\ln[(t_k - t)^2 + \tau^2]$  для РК, по которой определяются параметры модели Капицы-Баренблатта

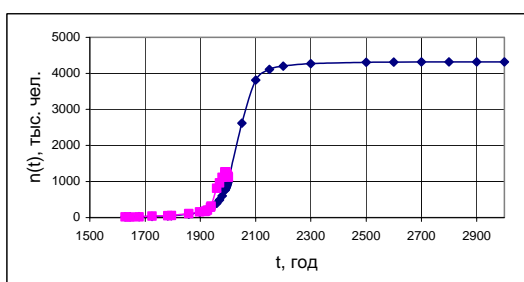


Рисунок 47. Сопоставление фактических данных по численности населения РК и полученных по модели

Как видим, согласно принятой модели демографического перехода, население Коми при сохраняющейся промышленной тенденции, заданной исторически строительством железной дороги и природными ресурсами, составит максимум 4-4,5 млн. человек. Возможно, вывести динамику населения РК на данный уровень сможет строительство новой железной дороги Архангельск-Сыктывкар и газопровода с Ямала. По крайней мере, динамика роста населения Коми за весь предыдущий период, как мы видим, по предлагаемой модели дает именно этот предел.

Дадим пример гиперболической динамики роста из экономики. На рис. 48 представлена динамика курса доллара по данным Центробанка РФ (URL: <http://audito.ru/rateofexchange/>). На рис. 49 дана обработка после логарифмирования уравнения гиперболической модели Капицы-Баренблатта в соответствующих координатах, по которым можно определить ряд параметров модели.

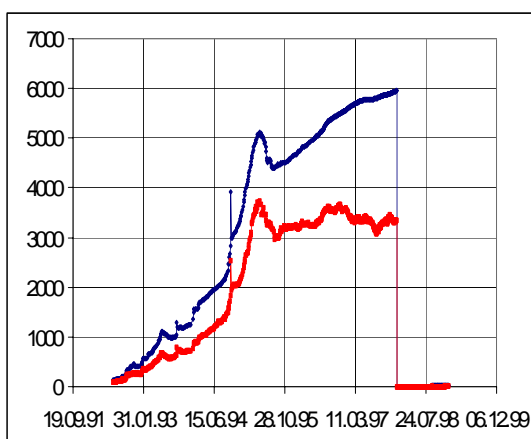


Рисунок 48. Динамика курса доллара  
(на оси абсцисс отложены даты торгов)

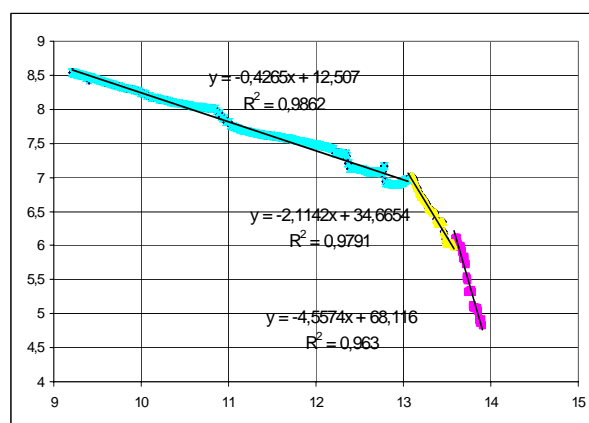


Рисунок 49. Обработка зависимости  $K(t)$  в логарифмических координатах  
(на оси абсцисс даны номера суток, начиная с 30.06.1993 г.)

На рис. 50 даны описания и прогноз по гиперболической модели динамики курса доллара по данным Центробанка РФ для различных отрезков времени.

Из рис. 50 видно, что, несмотря на подавление роста курса доллара, характер его гиперболического роста несколько раз прорывается, и, наконец, всё заканчивается кардинальными мерами и появлению локального максимума процесса, который, кстати, можно было уверенно прогнозировать по началу последнего гиперболического участка роста. Интересно то, что сами эти участки

роста курса доллара в некотором смысле были самоподобными, т.к. вид модели Капицы-Баренблатта не менялся, а из пяти параметров (коэффициентов модели и степеней в знаменателе) менялись только два из них, определяемых с самоподобных прямых (рис. 49).

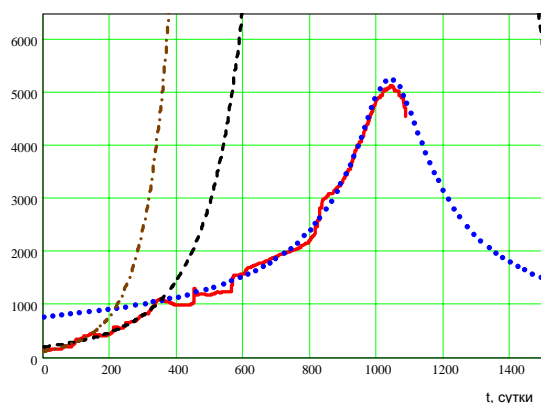


Рисунок 50. Описания и прогноз по гиперболической модели динамики курса доллара для различных отрезков времени (по оси абсцисс дан номер суток, начиная с 30.06.1993 г.)

Наконец, представим результаты расчетов динамики добычи нефти в мире по более сложным моделям, чем это было сделано вначале. На рис. 51 показаны результаты расчетов по экспоненциальной модели, дающие, естественно, бесконечный рост при увеличении времени.

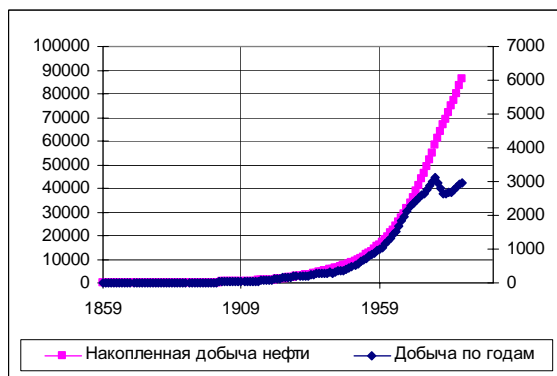


Рисунок 51. Накопленная добыча нефти (млн. т) фактическая и по экспоненциальной модели

Расчеты по логистической модели даны на рис. 52 и рис. 53, из которых следует, что  $a = 8,79 \cdot 10^{-2}$ ,  $b = 6,88 \cdot 10^{-7}$ . Прогноз накопленной добычи нефти в мире с этими параметрами по логистической модели дан на рис. 54, а годовой – на рис. 55. Видим, что логистическая модель дает финальный уровень добычи ~130 млрд. т. Естественно, прогноз на такой период вперед не может быть точным. Важно показать другое – структурное осмысленное поведение модели.

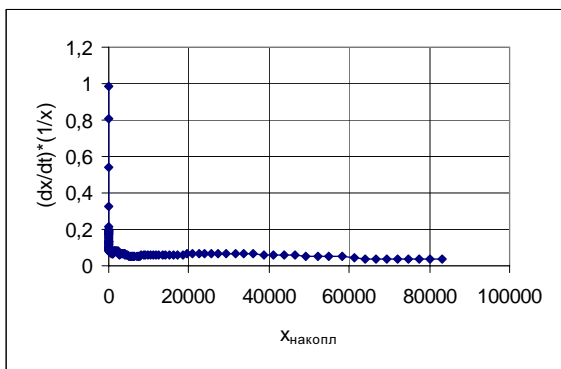


Рисунок 52. Зависимость  $\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)$  от  $x$

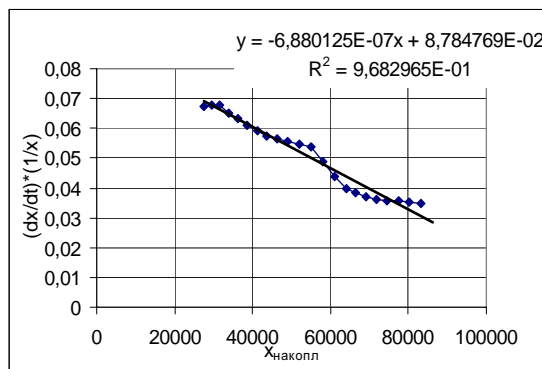


Рисунок 53. Зависимость  $\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)$  от

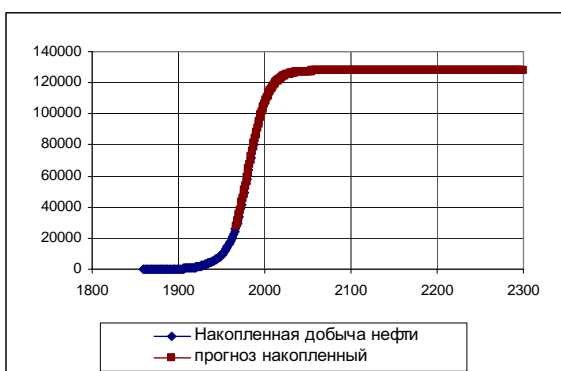


Рисунок 54. Сравнение фактических данных по накопленной добыче нефти в мире и полученных по логистической модели (дано в млн. т)



Рисунок 55. Сравнение фактических годовых отборов и полученных по логистической модели (в млн. т)

Для модели Капицы-Баренблатта оказалось, что фактические данные ложатся на прямую при  $T_1=1995$  и  $\tau=100$  лет (см. рис. 56). По этой прямой получаем следующие параметры модели Капицы-Баренблатта:  $\alpha=-7,677$ ;  $c=\exp(78,657)=1,44644 \cdot 10^{34}$ .

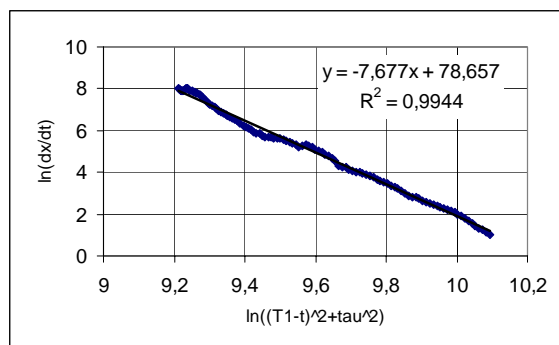


Рисунок 56. Зависимость  $\ln\left(\frac{dx}{dt}\right)$  от  $\ln\left[(T_1 - t)^2 + \tau^2\right]$

Прогноз по модели Капицы-Баренблатта с этими параметрами дан на рис. 57, рис. 58. Видно, что общее количество добытой нефти на Земле по этой модели составляет величину  $\sim 190$  млрд. т.

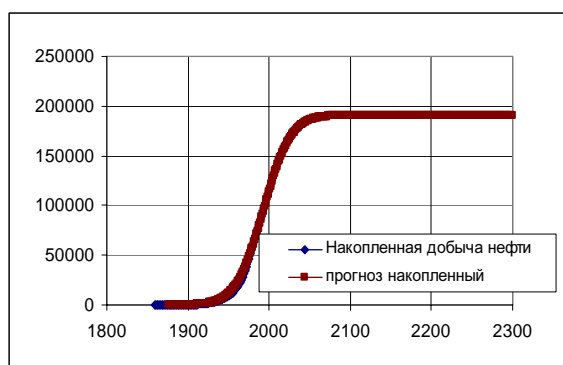


Рисунок 57. Сравнение фактических данных по накопленной добыче нефти в мире и полученных по модели Капицы-Баренблатта (цифры даны в млн. т)

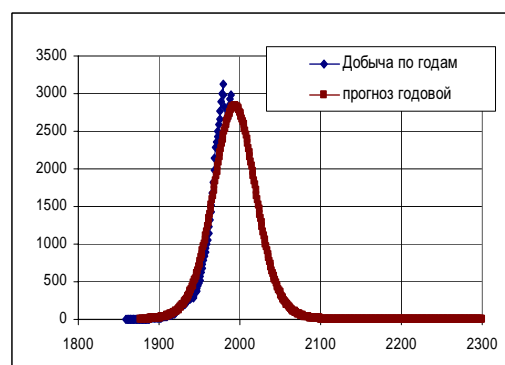


Рисунок 58. Сравнение фактических годовых отборов и полученных по модели Капицы-Баренблатта (в млн. т)

Итак, сложные нелинейные динамические системы, встречающиеся как в живой, так и в неживой природе, а также в различных областях науки и техники, могут иметь гиперболическую динамику роста основных показателей. Гиперболическое распределение распространяется на очень многие и совершенно различные классы объектов – лингвистические, биологические, технические, ландшафтные и т.д. Нами в настоящей работе проиллюстрировано применение модели Капицы-Баренблатта.

Нефтяная или газовая залежь является очень сложным природным объектом с неизвестными до конца структурой и строением. Поэтому мы следуем

за теми, кто предлагает рассматривать залежь в качестве открытой сложной нелинейной системы, способной к самоорганизации и системной эволюции. Поэтому для их описания и прогнозирования появляется необходимость системного (целостного) подходов при моделировании. Нами предлагается применять гиперболические модели для моделирования разработки крупных по запасам нефтяных или газовых месторождений, т.к. малые системы (как мы видим на примере анализа численности населения РК) более чутко реагируют на разные изменения (перестройка Горбачёва), а поэтому хуже описываются такими моделями.

В настоящей работе приводятся результаты анализа разработки некоторых нефтяных и нефтегазоконденсатного месторождений, расположенных на севере европейской части РФ (в республике Коми), а также некоторые конкретные примеры этого анализа. В качестве исходных данных для моделирования взяты основные показатели разработки. Для анализа разработки принимались различные феноменологические эволюционные модели [5; 7; 8; 9; 11-16], а залежи рассматривались как сложные, иерархически устроенные целостные системы [17-23]. Подведём итоги применения моделей, состоящих из одного эволюционного уравнения.

Исходная форма модели из одного эволюционного уравнения, принятая в настоящей работе, имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)  $\frac{dV}{dt} = aV^\alpha$ , где  $V$  – накопленная добыча углеводородов или воды из залежи (тогда  $\frac{dV}{dt} = Q$  – дифференциальный отбор из залежи). При  $a \neq 0$  и  $V=0$  имеем случай, соответствующий моменту времени до начала разработки, а при  $V=\text{const}$  – случай, соответствующий времени после окончания разработки. Результаты анализа представлены в табл. 4, 5. В этих таблицах и далее приняты следующие сокращения: Усинское нефтяное месторождение, залежь  $D_2$  – УНМ ( $D_2$ ); УНМ, пермокарбоновая залежь высоковязкой нефти – УНМ (РС); Возейское нефтяное месторождение, залежь  $D_2$  – ВНМ ( $D_2$ ); Западно-Тэбукское нефтяное месторождение, основная залежь, пласты III+IIb – ЗТНМ (3+2b); Вуктыльское нефтегазоконденсатное месторождение – ВНКМ.

Таблица 4

Автономные эволюционные модели (правая часть не зависит от t)

Значения параметров $a$ и $\alpha$ , вид модели	Вид решения	Название модели	Апробация
$a \neq 0, \alpha = 1$ $\frac{dV}{dt} = aV$	$V(t) = V_0 + a(t - t_0)$	Линейный рост	Период постоянной добычи; на отдельных коротких $\Delta t$
$a \neq 0, \alpha = 0$ $\frac{dV}{dt} = a$	$V(t) = V_0 e^{a(t - t_0)}$	Неограниченный экспоненциальный рост	Начальный этап в мировой добыче нефти; участками: УНМ (D2), ВНМ (D2), ЗТНМ (3+2b), ВНГКМ
$a = a_1 - b_1 V$ , $a_1 > 0, b_1 > 0, \alpha = 1$ , $\frac{dV}{dt} = a_1 V - b_1 V^2$ , $V(\infty) = \frac{a_1}{b_1} \equiv V_\kappa$	$V(t) = \frac{V_0 V_\kappa e^{a_1 t}}{V_\kappa - V_0 + V_0 e^{a_1 t}}$	Логистический (симметричный) рост с насыщением	Участками на многих месторождениях
$a \neq 0, \alpha = 2$ , $\frac{dV}{dt} = aV^2$	$V(t) = \frac{1/a}{\left[ \frac{1}{aV_0} + t_0 \right] - t}$ , $\left( \frac{1}{aV_0} \right) + t_0 \equiv t_\kappa$ , $t_\kappa$ – момент «катастрофы», когда $V$ достигает бесконечности	Гиперболический замедленный ( $V < 1$ ) или взрывной ускоренный ( $V > 1$ ) рост	Динамика численности Homo Sapiens; добыча нефти в мире



Таблица 5

Неавтономные эволюционные модели (правая часть зависит и от t)

Значения параметров $a$ и $\alpha$ , вид модели	Вид решения	Название модели	Апробация
$a = a_1 t + b_1, a = 0,$ $\frac{dV}{dt} = a_1 t + b_1$	$V(t) = V_0 + a_1 \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} \right) + b_1 (t - t_0)$	Параболический рост	На коротких $\Delta t$
$a = \frac{a_1}{\left[ (t-b)^c + d \right]^k},$ $\alpha = 0,$ b – момент перестройки, c – чётное $\frac{dV}{dt} = \frac{a_1}{\left[ (t-b)^c + d \right]^k}$	При $k=1, c=2$ $V(t) = V_0 + \frac{a}{\sqrt{\alpha}} \times \left( \arctg \frac{t-b}{\sqrt{\alpha}} - \arctg \frac{t_0-b}{\sqrt{\alpha}} \right)$ В более сложных случаях – численное решение	Модель Капицы – Баренблатта, или модель, аналогичная распределению Коши в матстатистике (в этом случае b – параметр положения – медиана)	Номо Sapiens; добыча нефти в мире; ЗТНМ (3+2b); ВНГКМ
$a = \frac{a_1}{t}, \alpha = 1,$ $\frac{dV}{dt} = \left( \frac{a_1}{t} \right) V$	$V(t) = V_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{a_1}$	Аллометрический (непропорциональный) рост	ЗТНМ (3+2b) (нач. уч. 9 мес.); ВНМ (D <sub>2</sub> ) (нач. уч. 7 мес.); ВНГКМ (нач. уч. 6 мес.)
$a = a_1 t^m,$ $\alpha = 1, m \neq -1,$ $\frac{dV}{dt} = (a_1 t^m) V$	$V(t) = V_0 \times \exp \left[ \frac{a_1}{m+1} (t^{m+1} - t_0^{m+1}) \right]$	Растянутый экспоненциальный рост или модель Кольрауша (аналогичная распределению Вейбулла в матстатистике)	ВНГКМ (добыча промыслового газа)
$a = a_1 e^{-a_2 t}, \alpha = 0,$ $\frac{dV}{dt} = a_1 e^{-a_2 t}$	$V(t) = V_0 + \frac{a_1}{a_2} (e^{-a_2 t} - e^{-a_2 t_0})$	При $a_2 < 0$ – экспоненциальный рост с насыщением; $a_2 > 0$ – неограниченный экспоненциальный рост	УНМ (D <sub>2</sub> ); ЗТНМ (3+2b); ВНГКМ
$a = a_1 e^{-a_2 t}, \alpha = 1,$ $\frac{dV}{dt} = (a_1 e^{-a_2 t}) V$	$V(t) = V_0 \times \exp \left[ \frac{a_1}{a_2} (e^{-a_2 t} - e^{-a_2 t_0}) \right]$	Модель Гомперца	УНМ (D <sub>2</sub> ); ЗТНМ (3+2b); ВНГКМ (добыча конденсата)

Приведённые в статье результаты основаны на идеологических подходах к эволюции больших нелинейных систем, привитых автору выдающимся учёным современности – академиком Азатом Халиловичем Мирзаджанзаде.

### Литература

1. Степин В. Новая научная картина мира / В. Степин // Знание-сила. – 2006. – №1. – С. 86-90.
2. Картинки мироздания из коллекции палеонтолога (беседа с Александром Раутианом). – «Знание-сила», 2002, №11, с.40-47.
3. Чикалин М.В. Творение и закономерности развития в природе и обществе: наука, техника, язык. Кн. 1. – М.: Белые Альвы, 2005. – 208с.
4. Эбелинг В. Физика процессов эволюции / В. Эбелинг, А. Энгель, Р. Файстель. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 328 с.
5. Варфоломеев С.Д., Гуревич КГ. Биокинетика: Практический курс. – М.: ФАИР-ПРЕСС, 1999. – 720 с.
6. Щелкачёв В.Н. Отечественная и мировая нефтедобыча / В.Н. Щелкачёв. – М.: Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2001. – 128с.
7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учеб. пособие для вузов / В.И. Арнольд. – М.: Наука, Главная ред. физ.-мат. лит., 1984. – 272с.
8. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 232 с.
9. Kohlrausch R. Theorie des elektrischen Rückstandes in der Leidener Flasche. Poggend., Annalen der Physik und Chemie, XCI, 1854, pp. 179-214.
10. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. / С.А. Айвазян, И.С. Еников, Л.Д. Мешалкин – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
11. Баренблатт Г.И. Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике / Г.И. Баренблатт. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 207с.

12. Капица С.П. Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. Очерк теории роста человечества / С.П. Капица. – М.: Международная программа образования, 1999. – 240с.
13. Хасанов М. Оценка извлекаемых запасов нефти на основе феноменологических моделей / М. Хасанов, Н. Карачурин, Е. Тяжев // Вестник инжинирингового центра ЮКОС. – 2001. – №2. – С. 3-7.
14. Кобринский Н.Е. Точность экономико-математических моделей / Н.Е. Кобринский, В.И. Кузьмин. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 255с.
15. Франс Дж. Математические модели в сельском хозяйстве / Дж. Франс, Дж.Х.М. Торнли. – М.: Агропромиздат, 1987. – 400с.
16. Сахал Д. Технический прогресс: концепции, модели, оценки / Д. Сахал. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 368с.
17. Мирзаджанзаде А.Х. Технология и техника добычи нефти: Учебник для вузов / А.Х. Мирзаджанзаде, И.М. Аметов, А.М. Хасаев, В.И. Гусев. – М.: Недра, 1986. – 382с.
18. Мирзаджанзаде А.Х. Диакоптика процессов нефтеотдачи пластов / А.Х. Мирзаджанзаде, И.А. Султанов. – Баку: Изд-во «Азербайджан», 1995. – 366с.
19. Мирзаджанзаде А.Х. Динамические процессы в нефтегазодобыче: Системный анализ, диагноз, прогноз / А.Х. Мирзаджанзаде, А.Х. Шахвердиев. – М.: Наука, 1997. – 254с.
20. Мирзаджанзаде А.Х. Фрагменты разработки морских нефтегазовых месторождений / А.Х. Мирзаджанзаде, Н.А. Алиев, Х.Б. Юсифзаде, Т.Ш. Салаватов, А.Ч. Шейдаев. – Баку: Елм, 1997. – 408с.
21. Мирзаджанзаде А.Х. Этюды и моделирования сложных систем нефтедобычи. Нелинейность, неравновесность, неоднородность / А.Х. Мирзаджанзаде, М.М. Хасанов, Р.Н. Бахтизин. – Уфа: Гилем, 1999. – 464с.
22. Мирзаджанзаде А.Х. Системные методы в нефтегазодобыче / А.Х. Мирзаджанзаде, В.П. Филиппов, И.М. Аметов. – М.: Изд-во «Техника», ООО «ТУМА ГРУПП», 2002. – 144с.
23. Мирзаджанзаде А.Х. Основы технологии добычи газа / А.Х. Мирзаджанзаде, О.Л. Кузнецов, К.С. Басниев, З.С. Алиев. – М.: ОАО «Издательство «Недра»», 2003. – 880с.

24. Мирзаджанзаде А.Х. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность / А.Х. Мирзаджанзаде, М.М. Хасанов, Р.Н. Бахтизин. – Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004. – 368 с.