

УДК 624:131; 622.24; 621.9

**ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ПРОНИКАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ МНОГОЛЕЗВИЙНЫХ ТЕЛ РЕЖУЩЕ-
СКАЛЫВАЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ В ТВЕРДЫЕ СПЛОШНЫЕ СРЕДЫ**

**FEATURES OF DYNAMIC PROCESSES MODELS OF ROTARY
MULTIBLADE CUTTING-SHEARING BODIES PENETRATION IN THE
SOLID CONTINUOUS MEDIA**

Сергеев С.В., Сергеев Ю.С., Решетников Б.А.

ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (национальный
исследовательский университет), филиал, г. Усть-Катав, Российская Федерация

S.V. Sergeev, Y.S. Sergeev, B.A. Reshetnikov

FSBEI HPE “South-Ural state university” (national research university),
branch, Ust-Katav, Russian Federation

e-mail: sergeev-sv@list.ru

Аннотация. В статье рассмотрены схемы формирования площадей удаляемых слоев материала при бурении скважин двух и многозубыми бурами. Математически описаны поперечные движения этих буровых инструментов. Исследована их поперечная устойчивость с применением метода большого параметра WKBJ-метода (Wentzel–Kramers–Brillouin–Jeffreys). Объяснены основные причины возникновения радиальных колебаний буровых инструментов. Показано, что поперечные (радиальные) колебания многозубых буровых инструментов неизбежны и возникают при разбуривании скважин, когда имеется только зависимость толщины удаляемого слоя от текущих и предыдущих положений бура. А также, при сплошном бурении, когда нет зависимости толщины слоя удаляемого материала, а имеет место зависимость его ширины от текущих и предыдущих положений центра буровой головки. Причем это возможно, как у буров большой длины и углом в плане не равным 90° , так и у буров небольшой длины и углом в плане, равным 90° , то есть при покачивании буровой головки.

Abstract. In the article, the formation scheme area sacrificial layers materials la drilling of two wells and Multi-point drills. Mathematically described by the transverse motion of the drilling tools. An investigation of cross-resistance with WKBJ-method (Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys). Explained the main causes of radial oscillations of drilling tools. It is shown, that the transverse (radial ones) Multi-point fluctuations of drilling tools are unavoidable and occur when drilling wells, where only the dependence of the thickness of the layer being removed from the current and previous positions

drill. Moreover, with continuous drilling state where there is no dependence of layer thickness of material removed, and there is a dependence of the width of the current and previous positions of the center drill bit. Moreover, it is possible, like drills and long term angle not equal to 90° , and a small length and drills in terms of angle of 90° , i.e. when the drill head shaking.

Ключевые слова: бурение скважин и шпуров, радиальные колебания буров, удаляемые слои, динамические факторы.

Keywords: drilling of wells and boreholes, the radial oscillations of the bores, delete layers, the dynamic factors.

Бурение разведочных скважин на все виды полезных ископаемых, включая нефть и газ, как правило, трудоемко, поэтому характеризуется достаточно большими материальными затратами по всему циклу их сооружения.

Положение значительно усугубляется при разведке ископаемых в уникальных горно-геологических и географо-климатических условиях.

Вместе с тем, бурение является одним из самых востребованных способов геологического исследования недр Земли, поисков и разведки залежей фактически всех полезных ископаемых. Объемы буровых работ, как в мире, так и в России постоянно растут и требуют новых технико-технологических и инструментальных решений для снижения затрат на их проведение.

Современное состояние научно-технического развития в отечественной буровой отрасли делает весьма актуальным разработку новых научных подходов для объективной оценки эффективности разрушения горных пород инструментами режуще-скалывающего действия. Это обусловлено тем, что:

- во-первых, традиционные способы и технические средства направленного бурения часто не способны обеспечить эффективность стабилизации траекторий скважин [1];

- во-вторых, разнообразие буровых инструментов и своеобразие физических явлений, происходящих при бурении скважин таково, что до сих пор практически не удалось построить единой физической теории таких процессов, объясняющей всю совокупность эмпирически известных фактов прогнозирующих новые эффекты и явления. Это положение объясняется недостаточной изученностью динамики процесса бурения скважин.

В работах [2, 3], были вскрыты закономерности и показан механизм формирования разбивки многолезвийными концевыми инструментами. Было показано, что это происходит из-за поперечных квазикруговых автоколебаний инструмента с частотой ω и амплитудой ρ .

В работах [4, 5], с этой же позиции, был объяснен вибрационный механизм формирования увода 4-х лезвийного бурового инструмента и, было положено то, что и при бурении в сплошном материале будет действовать тот же самый механизм. Для этого, необходимо доказать, что и у двузубого бура отсутствует собст-

венная радиальная устойчивость, то есть то, что последний в процессе съема материала совершает радиальные автоколебания.

Описание движения вращающегося бурильного инструмента, как правило [2], производят на макроуровне, когда его формообразующую часть рассматривают как абсолютно жесткое тело, имеющее кинематические связи. Это упрощает аппарат в связи с заменой системы уравнений в частных производных на системы обычных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим динамику поперечных движений бурильного инструмента с углом в плане $\varphi < 90^\circ$, и длиной $l \gg D$ (диаметр) на макроуровне, то есть, представив в процессе разбуривания скважины движение центра инструмента с заданными коэффициентами жесткости j и приведенной массой m (рисунок 1).

При этом на бурильный инструмент действуют неуравновешенные силы ΔP_y и ΔP_z , являющиеся равнодействующими радиальных и главных составляющих сил резания, действующих на каждый зуб инструмента, сила упругости $P_{упр} = j\rho$, пропорциональная смещению ρ оси инструмента от оси скважины и силы инерции $m\ddot{\xi}$, $m\ddot{\eta}$, зависящие от ускорений $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$ движения центра инструмента.

Система дифференциальных уравнений описывающих движение бурильного инструмента имеет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} + j\xi = -\Delta P_y \cos \psi + \Delta P_z \sin \psi; \\ m\ddot{\eta} + j\eta = -\Delta P_y \sin \psi - \Delta P_z \cos \psi, \end{cases} \quad (1)$$

где ψ – текущий угол поворота инструмента.

Проекции сил ΔP_y и ΔP_z на поперечные оси ξ , η определяются как сумма проекций радиальных и главных составляющих сил по всем зубьям на соответствующие оси координат, в этом случае система (1) преобразуется в систему:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} + j\xi = -\sum_{i=1}^z P_{yi} \cos \beta_i + \sum_{i=1}^z P_{zi} \sin \beta_i; \\ m\ddot{\eta} + j\eta = -\sum_{i=1}^z P_{yi} \sin \beta_i - \sum_{i=1}^z P_{zi} \cos \beta_i, \end{cases} \quad (2)$$

где β_i – текущий угол поворота каждого зуба.

Эту систему дифференциальных уравнений далее представим, как систему уравнений с запаздывающим аргументом и она будет существенно нелинейной, так как силы съема материала зависят от геометрии инструмента и его движения.

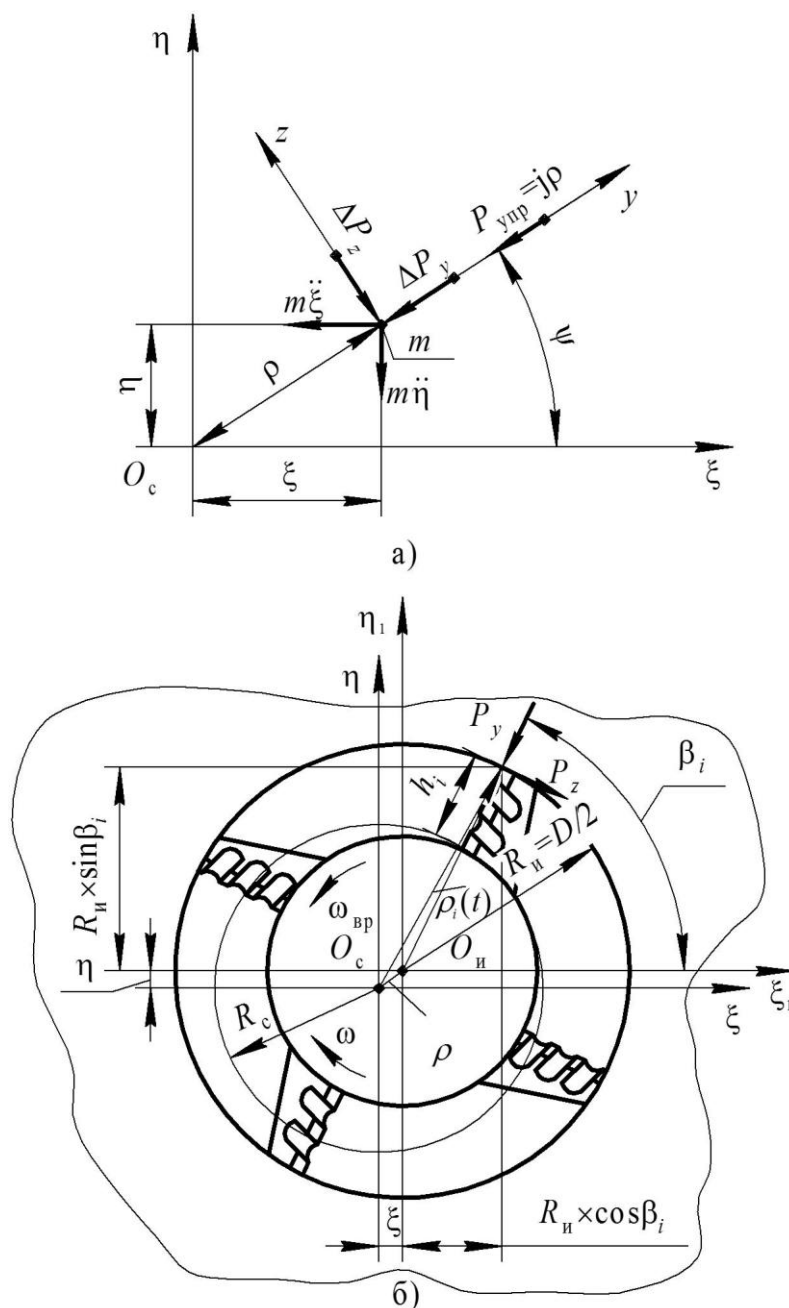


Рисунок 1. Элементы и характеристики процесса формирования скважины при разбурировании
 а – схема действия сил на центр бурового инструмента;
 б – схема снятия припуска при зависимости толщины удаляемого слоя от текущих положений центра инструмента

Несмотря на то, что процессы резания, истирания, ударного удаления и сминания - различны, следуя теории пластичности без учета упрочнения, примем, в первом приближении, что действующие при этих процессах силы примерно пропорциональны площадям сечения удаляемого материала f_i :

$$\begin{cases} P_{yi} = K_{yi} f_i = K_{yi} a_i b_i; \\ P_{zi} = K_{zi} f_i = K_{zi} a_i b_i, \end{cases} \quad (3)$$

где a_i – толщина сечения; b_i – ширина сечения; K_{yi} , K_{zi} – коэффициенты сил резания (скалывания и т.п.).

Тогда система (2) будет иметь вид:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} + j\dot{\xi} = -\sum_{i=1}^z K_{yi} a_i b_i \cos \beta_i + \sum_{i=1}^z K_{zi} a_i b_i \sin \beta_i; \\ m\ddot{\eta} + j\dot{\eta} = -\sum_{i=1}^z K_{yi} a_i b_i \sin \beta_i - \sum_{i=1}^z K_{zi} a_i b_i \cos \beta_i, \end{cases} \quad (4)$$

Решения систем (2) и (4) будем искать в первую очередь при использовании идеальных, геометрически симметричных инструментов, симметричном припуске и нулевых начальных условиях, то есть при отсутствии погрешностей наладки бурового станка.

Примем в системе (4), что $z \geq 2$; $K_{yi} = K_y$; $K_{zi} = K_z$; все углы поворотной симметрии равны, то есть:

$$\beta_i = \omega_{вр} t - \tau,$$

где τ – осевые расстояния между вершинами зубьев инструмента; $\omega_{вр}$ – угловая скорость вращения инструмента; t – время.

Толщины a_i и ширины b_i удаляемого слоя зависят от положения центра O_n инструмента ξ и η , а в результате – от площадей удаляемых слоев (3) и составляющих сил съема материала, входящих в правые части системы (2).

Рассмотрим в линейном приближении случай, когда ширина удаляемого слоя не зависит от положения центра инструмента, а толщина удаляемого слоя зависит от текущего положения инструмента, причем допустим, что предварительно пробуренная скважина радиусом R_c идеально цилиндрична и расположена концентрично оси вращения шпинделя инструмента (рисунок 1б).

Когда $b_i = S/z = \text{const}$; $P_{yi} = 0$; P_{zi} – прямо пропорциональна глубине удаляемого слоя; $K_{zi} = K_z$; $a_i \approx \rho_i(t) - R_c$ и, предполагая равенство коэффициентов k жесткости, система (4) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + k\xi = K_2 \sum_{i=1}^z (\rho_i(t) \sin \beta_i - R_c \sin \beta_i); \\ \ddot{\eta} + k\eta = -K_2 \sum_{i=1}^z (\rho_i(t) \cos \beta_i - R_c \cos \beta_i), \end{cases} \quad (5)$$

где $K_2 = \frac{SK_z}{zm}$, а $\rho(t)$ – радиус-вектор, смещения текущего положения зуба инструмента от оси скважины.

Если,

$$\rho_i(t) \sin \beta_i = \eta + \frac{D}{2} \sin \beta_i ; \quad \rho_i(t) \cos \beta_i = \xi + \frac{D}{2} \cos \beta_i,$$

то при равномерном шаге зубьев система (5) преобразуется:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + k\xi = K_2\eta + K_2 \sum_{i=1}^z \left(\frac{D}{2} - R_c \right) \sin \beta_i ; \\ \ddot{\eta} + k\eta = -K_2\xi - K_2 \sum_{i=1}^z \left(\frac{D}{2} - R_c \right) \cos \beta_i , \end{cases} \quad (6)$$

Формальным решением системы (6) при нулевых начальных условиях есть значения $\xi = 0$, $\eta = 0$. Однако для системы (6), это тривиальное решение неустойчиво. Это можно установить как непосредственным решением системы (6), например, операторным или любым другим методом, так и воспользовавшись теми или иными признаками устойчивости.

Заметим, что отсутствие собственной устойчивости можно наблюдать при любом соотношении K_2 и k , в том числе и при сколь угодно малых K_2 .

Проверим для наглядности анализ устойчивости методом большого параметра (*WKBJ*) [6].

Для этого представим систему (6) в виде:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \lambda^2 \xi = \varepsilon \eta ; \\ \ddot{\eta} + \lambda^2 \eta = -\varepsilon \xi , \end{cases} \quad (7)$$

где $\lambda = \sqrt{k}$, $\varepsilon = K_2$.

Найдем решение системы (7) в виде:

$$\begin{cases} \xi = A(t) e^{\pm i\lambda t} , \\ \eta = B(t) e^{\pm i\lambda t} , \end{cases} \quad (8)$$

где $A(t)$, $B(t)$ медленно меняющиеся функции.

Вторые производные решения (8) будут равны:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \ddot{A} e^{\pm i\lambda t} \pm 2i \lambda \dot{A} e^{\pm i\lambda t} - \lambda^2 A e^{\pm i\lambda t} ; \\ \ddot{\eta} = \ddot{B} e^{\pm i\lambda t} \pm 2i \lambda \dot{B} e^{\pm i\lambda t} - \lambda^2 B e^{\pm i\lambda t} , \end{cases} \quad (9)$$

Подставим решения (8) и их вторые производные (9) в систему (7), считая, что вторые производные медленно меняющихся функций пренебрежимо малыми $\ddot{A} \approx 0$; $\ddot{B} \approx 0$, получим:

$$\begin{cases} \pm 2i \lambda \dot{A} = \varepsilon B; \\ \pm 2i \lambda \dot{B} = -\varepsilon A. \end{cases} \quad (10)$$

Отсюда

$$\dot{A} - \frac{\varepsilon^2}{4 \cdot \lambda^2} A = 0,$$

откуда

$$A = B = e^{\pm \frac{\varepsilon}{2\lambda} t}. \quad (11)$$

Очевидно, что решение (8) содержит неограниченно возрастающие функции, а это подтверждает неустойчивость даже при очень малых $K_2 = \varepsilon$.

Теперь проверим, как повлияло на вывод об отсутствии собственной устойчивости процесса обработки предположение о равенстве коэффициентов жесткости.

Перепишем систему (7) в виде:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \lambda_1^2 \xi = \varepsilon \eta; \\ \ddot{\eta} + \lambda_2^2 \eta = -\varepsilon \xi, \end{cases} \quad (12)$$

где $\lambda_1^2 = \frac{k_\xi}{m_\xi}$; $\lambda_2^2 = \frac{k_\eta}{m_\eta}$.

Запишем уравнения системы (12) относительно ξ :

$$\ddot{\xi} + \xi(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \xi(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \varepsilon^2) = 0, \quad (13)$$

для которого характеристическое уравнение имеет вид:

$$\sigma^4 + \sigma^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \varepsilon^2) = 0,$$

откуда

$$\sigma^2 = \frac{-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \pm \sqrt{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - \varepsilon^2}}{2}. \quad (14)$$

Полагая, что разность $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = \Delta \lambda^2$ – мала, а ε и λ – не малы, то при $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 2 \cdot \lambda^2 + \Delta \lambda^2$, получим, что

$$\sigma^2 \approx -\lambda^2 - \frac{\Delta \lambda^2}{2} \pm i\varepsilon \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \lambda^2}{\varepsilon} \right)^2 \right],$$

откуда

$$\sigma_{1,2,3,4} = \pm i \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{2} \Delta\lambda \pm \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\lambda^2}{\varepsilon} \right)^2 \right]} / \left(\lambda^2 + \frac{1}{2} \Delta\lambda^2 \right).$$

То есть в решении по-прежнему есть экспоненты с положительной вещественной частью, а собственной устойчивости нет.

Таким образом, рассмотрение случаев, описываемых системами (7) и (12) подтверждают вывод об отсутствии собственной устойчивости реального процесса проникания в твердые среды вращающихся стержней (буров).

Наличие при этом на зубьях радиальных сил съема материала, или иных центральных возвращающих сил, зависящих от текущих координат, в целом так же не влияет на этот вывод, так как все возвращающие силы складываются с возвращающей силой упругости и как бы увеличивают жесткость.

Рассмотрим схемы бурения, при осуществлении которых нет зависимости толщины удаляемого материала от положения центра бурового инструмента, и, напротив, есть зависимость ширины b_i удаляемого слоя от текущего $\xi(t)$, $\eta(t)$ и от некоторого предыдущего положения центра бурового инструмента $\xi(t-\tau)$, $\eta(t-\tau)$.

Отметим, что толщина удаляемого слоя не зависит от положения центра инструмента тогда, когда идет образование скважины в сплошной твердой среде (рисунок 2).

Если в схемах бурения, когда угол в плане $\varphi = 90^\circ$, допустить строго параллельное перемещение инструмента, то радиальные составляющие сил съема материала вообще не возникнут, так как ни припуск, ни ширина удаляемого слоя не зависят от положения инструмента. Но именно в этом случае такое допущение некорректно, так как, строго говоря, чисто параллельное смещение зубьев инструмента невозможно и практически всегда при смещении возникает некоторый наклон – покачивание, поворот, а этого достаточно, чтобы возникла зависимость ширины удаляемого слоя от положений бурового инструмента.

В случае значительных углов в плане φ по заборному конусу, несмотря на наличие некоторого малого угла поворота, ширина удаляемого слоя зависит, главным образом, от положений центра и угла в плане, поэтому если угол в плане не близок к 90° поворотом допустимо пренебречь.

Составим сначала математическую модель бурения при небольших углах заборного конуса бура.

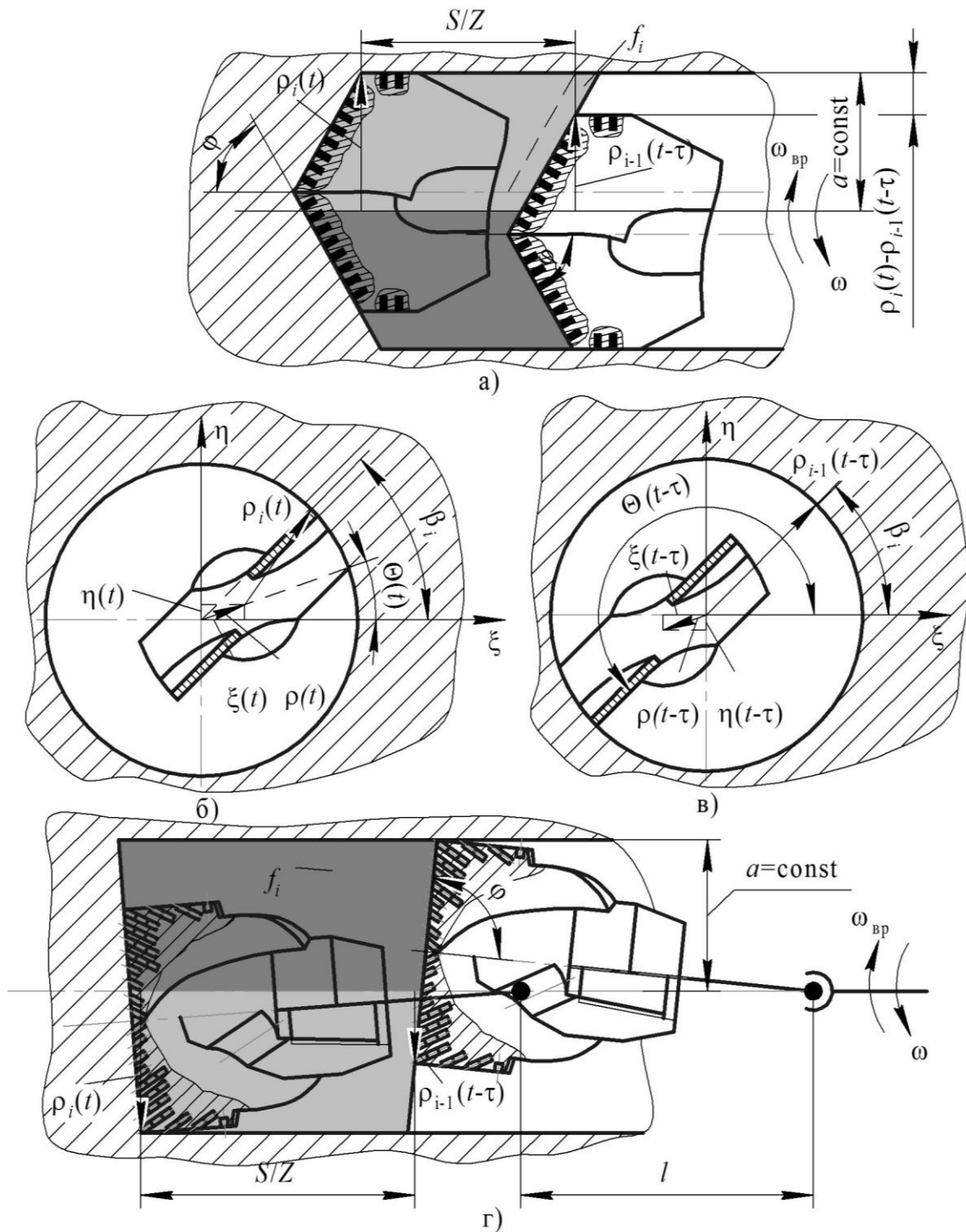


Рисунок 2. Схемы определения

а – толщины удаляемого слоя в зависимости от положения центра бурового двузубого инструмента при $\phi \neq 90^\circ$; **б** – ширины удаляемого слоя в зависимости от положения центра бурового инструмента при $\phi = 90^\circ$ в первом квадранте; **в** – ширины удаляемого слоя в зависимости от положения центра бурового инструмента при $\phi = 90^\circ$ в третьем квадранте; **г** – ширины удаляемого слоя в зависимости от положения центра бурового инструмента при $\phi = 90^\circ$ в продольном сечении

Толщину удаляемого слоя в рассматриваемых случаях можно считать постоянной $a_i = a = \text{const}$, а ширина удаляемого слоя b_i при повороте бура на один зуб будет составлять (рисунок 2а):

$$b_i = \frac{S}{z} + \frac{\rho_i(t) - \rho_{i-1}(t - \tau)}{\text{tg}\varphi}, \quad (15)$$

где S/z – подача на зуб бурового инструмента; $\tau = \frac{2\pi}{\omega_{\text{вр}} z}$ – время между текущим и предыдущим положениями центра инструмента при повороте его на один зуб; $\omega_{\text{вр}}$ – угловая скорость вращения бура.

Тогда зависимости (3) сил съема материала от площади удаляемого слоя будут иметь вид:

$$\begin{cases} P_{yi} = K_y a \left(\frac{S}{z} + \frac{\rho_i(t) - \rho_{i-1}(t - \tau)}{\text{tg}\varphi} \right); \\ P_{zi} = K_z a \left(\frac{S}{z} + \frac{\rho_i(t) - \rho_{i-1}(t - \tau)}{\text{tg}\varphi} \right) \end{cases} \quad (16)$$

С учетом изменения положения оси бура относительно оси скважины при его вращении (рисунок 2б, в) можно принять, что:

$$\begin{aligned} \rho_i(t) - \rho_{i-1}(t - \tau) &= \rho(t) \cos(\beta_i - \Theta(t)) - \rho(t - \tau) \cos(\beta_i - \Theta(t - \tau)) = \\ &= \xi(t) \cos \beta_i + \eta(t) \sin \beta_i - \xi(t - \tau) \cos \beta_i - \eta(t - \tau) \sin \beta_i, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\rho_i(t)$, $\rho_{i-1}(t - \tau)$ – радиусы смещения текущего и предыдущего положений зуба инструмента от оси скважины.

Подставив выражения (16), (17) в систему (2), и разделяя все члены уравнения на коэффициент при высшей производной, получим:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}(t) + \lambda^2 \xi(t) = - \sum_{i=1}^z \frac{K_{yi}}{m} a \cos \beta_i f_i + \sum_{i=1}^z \frac{K_{zi}}{m} a \sin \beta_i f_i; \\ \ddot{\eta}(t) + \lambda^2 \eta(t) = - \sum_{i=1}^z \frac{K_{yi}}{m} a \sin \beta_i f_i - \sum_{i=1}^z \frac{K_{zi}}{m} a \cos \beta_i f_i, \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{где } f_i = \left(\frac{S}{z} + \frac{\xi(t) \cos \beta_i + \eta(t) \sin \beta_i - \xi(t - \tau) \cos \beta_i - \eta(t - \tau) \sin \beta_i}{\text{tg}\varphi} \right);$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{j}{m}} - \text{собственная частота изгибных колебаний стержня бура.}$$

Введем для упрощения следующие выражения, (считая, что $K_{yi} = K_y$; $K_{zi} = K_z$):

$$\begin{cases} K_1 = \frac{K_y}{m} a; K_2 = \frac{K_z}{m} a; \\ k_1 = K_1 \frac{\pi}{\operatorname{tg}\varphi}; k_2 = K_2 \frac{\pi}{\operatorname{tg}\varphi}. \end{cases} \quad (19)$$

Тогда система (18) после математических преобразований (раскрытия скобок и замены суммы интегралами) примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}(t) + \lambda^2(t) = -k_1(\xi(t) - \xi(t - \tau)) + k_2(\eta(t) - \eta(t - \tau)); \\ \ddot{\eta}(t) + \lambda^2(t) = -k_1(\eta(t) - \eta(t - \tau)) + k_2(\xi(t) - \xi(t - \tau)). \end{cases} \quad (20)$$

Теперь составим математические модели бурения, когда угол в плане бурового инструмента $\varphi = 90^\circ$. В этом случае возникают дополнительные вращающиеся силы, поскольку возникает отличная от нуля равнодействующая осевая сила, которая относительно точки качания создает вращающий момент. Поэтому здесь радиальные силы заменяются моментами от продольных (осевых) сил P_x , и:

$$P_{yi} = \frac{D}{2l} P_x. \quad (21)$$

Однако, при существенной изгибной жесткости и при $D \ll 2l$, множитель $D/2l$ можно считать малой величиной, в этом случае система (2) будет иметь упрощенный вид:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}(t) + \lambda^2 \xi = \sum_{i=1}^z \frac{P_{zi}}{m} \sin \beta_i; \\ \ddot{\eta}(t) + \lambda^2 \eta = -\sum_{i=1}^z \frac{P_{zi}}{m} \cos \beta_i. \end{cases} \quad (22)$$

где $P_{zi} = K_z a_i b_i$; $a_i = a = \text{const}$.

Ширина удаляемого слоя b_i при повороте бурового инструмента с $\varphi = 90^\circ$ на один зуб будет составлять (рисунок 2г):

$$b_i = \frac{S}{z} - \frac{D}{2 \cdot l} [\xi(t) \cos \beta_i + \eta(t) \sin \beta_i] + \frac{D}{2l} [\xi(t - \tau) \cos \beta_i + \eta(t - \tau) \sin \beta_i]. \quad (23)$$

После подстановки выражений (19) и (23) в систему (22) и математических преобразований, аналогичных случаю при $\varphi \neq 90^\circ$, получим упрощенную систему:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}(t) + \lambda^2 \xi(t) = \varepsilon_2 \eta(t) - \varepsilon_2 \eta(t - \tau); \\ \ddot{\eta}(t) + \lambda^2 \eta(t) = -\varepsilon_2 \xi(t) - \varepsilon_2 \xi(t - \tau), \end{cases} \quad (24)$$

где $\varepsilon_2 = -K_2 \pi \frac{D}{2l}$.

Общим тривиальным решением систем (20) и (24) будет являться решение $\xi = 0$, $\eta = 0$, неустойчивость которых можно показать, используя *WKBJ* метод или метод большого параметра.

Рассмотрим, например, систему (24), решение которой найдем в виде:

$$\begin{cases} \xi(t) = A(t)e^{\pm i\lambda t}; \\ \eta(t) = B(t)e^{\pm i\lambda t}, \end{cases} \quad (25)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – медленно меняющиеся функции с $\ddot{A} = \ddot{B} = 0$.

После подстановки (25) в (24) и сокращения экспонент, будем иметь:

$$\begin{cases} 2i\lambda\dot{A}(t) = \varepsilon_2 B(t) - \varepsilon_2 B(t - \tau)e^{\pm i\lambda\tau}; \\ \pm 2i\lambda\dot{B}(t) = -\varepsilon_2 A(t) + \varepsilon_2 A(t - \tau)e^{\pm i\lambda\tau}. \end{cases} \quad (26)$$

Поскольку A и B – медленно меняющиеся функции, а τ – мало, сделав приближенную замену:

$$\begin{cases} A(t - \tau) = A(t) - \dot{A}(t)\tau; \\ B(t - \tau) = B(t) - \dot{B}(t)\tau. \end{cases} \quad (27)$$

получаем:

$$\begin{cases} \pm \frac{i\lambda}{\varepsilon} \dot{A}(t) = \dot{B}(t)\tau e^{\pm i\lambda\tau} + B(t)(1 - e^{\pm i\lambda\tau}); \\ \pm \frac{i\lambda}{\varepsilon} \dot{B}(t) = -\dot{A}(t)\tau e^{\pm i\lambda\tau} - A(t)(1 - e^{\pm i\lambda\tau}). \end{cases} \quad (28)$$

Выражая из первого уравнения системы (28) \dot{A} , определяя из него интегрированием $A(t)$ и подставляя найденные величины $\dot{A}(t)$ и $A(t)$ во второе уравнение системы, получим уравнение относительно $B(t)$, эквивалентное системе (26):

$$\ddot{B}(t) \left(1 - \frac{\varepsilon_2^2 \tau^2 e^{\pm 2i\lambda\tau}}{4\lambda^2} \right) - \frac{\varepsilon_2^2}{4\lambda^2} \dot{B}(t) (1 + \tau) e^{\pm i\lambda\tau} (1 - e^{\pm i\lambda\tau}) - B(t) \frac{\varepsilon_2^2}{4\lambda^2} (1 - e^{\pm i\lambda\tau})^2 = 0. \quad (29)$$

При $t = 0$, когда $e^{\pm i\lambda\tau} = 1$, имеем $\ddot{B}(t) = 0$, то есть $B(t)$ – неограниченно растущая линейная функция, следовательно, согласно (25), решение системы (24) $\xi = 0$, $\eta = 0$ является неустойчивым.

Рассмотрим уравнение (29) при $t \neq 0$, когда $e^{\pm i\lambda\tau} \neq 1$.

Его характеристическое уравнение при малом τ имеет вид:

$$\sigma^2 - \sigma \left(\frac{\varepsilon_2^2}{4\lambda^2} e^{\pm i\lambda\tau} \right) (1 - e^{\pm i\lambda\tau}) - \frac{\varepsilon_2^2}{4\lambda^2} (1 - e^{\pm i\lambda\tau})^2 = 0, \quad (30)$$

корни которого:

$$\sigma_{1,2,3,4} = (1 - e^{\pm i\lambda t}) \frac{\varepsilon}{2\lambda} \left(\frac{\varepsilon}{2\lambda} e^{\pm i\lambda t} \pm \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{16\lambda}} e^{\pm i\lambda t} \right). \quad (31)$$

При малом $\frac{\varepsilon}{2\lambda}$ (меньше 1 мс) имеем:

$$\sigma_{1,2,3,4} = \pm \frac{\varepsilon}{2\lambda} (1 - e^{\pm i\lambda t}).$$

то есть и при $t \neq 0$, $A(t)$ и $B(t)$ являются неограниченно растущими функциями и устойчивость тривиальных решений отсутствует.

Исследование системы (20), аналогичное исследованию системы (24), и в случае с $\varphi < 90^\circ$ показывает отсутствие устойчивости системы.

Факт отсутствия устойчивости тривиального решения для вращающихся буровых инструментов с числом зубьев два и более нуждается в осмыслении и обобщении. Иными словами – отсутствие устойчивости нулевого решения означает мягкое возбуждение автоколебаний, подобно возбуждению флаттерных автоколебаний [7]. Важным косвенным каналом информации о механизме автоколебаний многолезвийных инструментов являются так называемые "риски", которые могут возникать на поверхности съема материала. Эти "риски" – следы радиальных колебаний можно уверенно наблюдать при мгновенном останове процесса съема материала [2]. Отметим, что определенную трудность в использовании этой информации можно усмотреть в том, что "риски" могут порождаться как поперечными (радиальными), так и крутильно-осевыми вибрациями инструментов. Однако риски – следы крутильно-осевых вибраций имеют прямолинейную форму, а следы от поперечных колебаний – криволинейную [8].

Выводы

При бурении скважин либо шпуров любыми вращающимися буровыми инструментами тривиальные решения математических моделей, соответствующие статическому равновесию системы, всегда неустойчивы. Возникающие при этом быстрые поперечные вибрации, являются мягковозбуждаемыми автоколебаниями и относятся к классу диссипативных структур, возможность их возникновения вытекает из принципа минимальной диссипации, но порог возникновения отсутствует, в отличие от известных диссипативных структур.

Вскрытый нами факт возникновения радиальных автоколебаний вращающихся буровых инструментов можно распространить не только на другие вращающиеся концевые инструменты, но и даже на стержни, контактирующие своим торцом с плоской поверхностью. Это явление было положено в основу разработки

новых способов возбуждения колебаний [9,10] и виброприводов машин, реализующих эти способы.

Данная статья частично отражает результаты работ, поддержанных РФФИ (проекты №12-08-00981-а и № 12-08-31533-мол_а на 2012-14 годы), и федеральной целевой программой "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы (Госконтракт №14.740.11.1123 от 30.05.2011 г. на 2011-2013 гг.).

Литература

1. Кривошеев, В.В. Искривление скважин в анизотропных породах. Томск: изд-во НТЛ, 1999. 240 с.
2. Лакирев С.Г., Хилькевич Я.М., Сергеев С.В. Вибрационная механика процессов сверления-бурения и новые динамические эффекты. Челябинск: изд-во ЧГТУ, 1993. 286 с.
3. Способ обработки отверстий мерным многолезвийным инструментом / Лакирев С.Г., Хилькевич Я.М., Сергеев С.В.: а.с. №1537398 СССР, МКИ В 23 В 35/00. № 4324358/31-08; заявл. 02.11.87; опубл. 23.01.90, Бюл. №3. 11 с.
4. Способ обработки отверстий с криволинейной осью / Лакирев С.Г., Хилькевич Я.М., Сергеев С.В. а.с. №1537398 СССР, МКИ В 23 В 35/00. Решетников. № 4324358/31-08; заявл. 02.11.87; опубл. 23.01.90, Бюл. №3. 11 с.
5. Сергеев, С.В. Анализ механизмов возникновения погрешностей обработки при формообразовании отверстий концевым многолезвийным инструментом. // Технология машиностроения. 2010. №2. С. 14-18.
6. Моисеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
8. Сергеев С.В. Научные основы процессов формообразования внутренних поверхностей вращающимися многоэлементными проникающими. // Вестник МГТУ им. Г.И. Носова. (Магнитогорск). 2010. №2. С. 43-46
9. Способ возбуждения круговых колебаний и устройство для его осуществления / Лакирев С.Г., Хилькевич Я.М., Сергеев С.В.: а.с. №1664412 СССР, МКИ В 06 В 1/16. №4414912/24-28; заявл. 24.04.88; опубл. 23.07.91, Бюл. №27. 5 с.
10. Способ возбуждения колебаний / С.В. Сергеев и др.: пат. 2476275 Рос.Федерация, МПК В 06 В 1/16 №2011132718/28; заявл. 03.08.2011; опубл. 27.02.2013, Бюл. №6. 14 с.

References

1. Krivosheev, V.V. Iskrivlenie skvazhin v anizotropnyh porodah . Tomsk: Izd-vo NTL, 1999. 240 s. [in russian].
2. Lakirev, S.G. Ja.M. Hil'kevich, S.V. Sergeev Vibracionnaja mehanika processov sverlenija-burenija i novye dinamicheskie yeffekty: monografija. CHeljabinsk: Izd-vo CHGTU, 1993. 286 s. [in russian].
3. Sposob obrabotki otverstii mernym mnogolezviinym instrumentom / S.G. Lakirev, Ja.M. Hil'kevich, S.V. Sergeev. A.s. 1710213 SSSR, MKI V 23 V 35/00. № 4179854/63; zavl. 12.01.87; opubl. 07.02.92, Byul. №5. 13 s. [in russian].
4. Sposob obrabotki otverstii s krivolineinoi os'yu / S.G. Lakirev, Ja.M. Hil'kevich, S.V. Sergeev, B.A. A.s. №1537398 SSSR, MKI V 23 V 35/00. Reshetnikov. № 4324358/31-08; zajavl. 02.11.87; opubl. 23.01.90, Byul. №3. 11 s. [in russian].
5. Sergeev, S.V. Analiz mehanizmov vozniknovenija pogreshnosti obrabotki pri formoobrazovanii otverstii koncevym mnogolezviinym instrumentom / S.V. Sergeev // Tehnologija mashinostroenija. M.: IC Tehnologija mashe-nostroenija, 2010. №2. S. 14-18. [in russian].
6. Moiseev, N.N. Asimptoticheskie metody nelineinoi mehaniki / N.N. Moiseev. M.: Nauka, 1981. 400 s. [in russian].
7. Biderman, V.L. Teorija mehanicheskikh kolebanii /V.L. Biderman. M.: Vysshaja shkola, 1980. 408 s. [in russian].
8. Sergeev, S.V. Nauchnye osnovy processov formoobrazovanija vnutrennih poverhnosti vrashayushimisja mnogoyelementnymi pronikateljami// Vestnik MGTU im. G.I. Nosova. Magnitogorsk: Izd-vo MGTU im. G.I. Nosova, 2010. №2. S. 43-46 [in russian].
9. Sposob vozbuzhdenija krugovyh kolebanii i ustroistvo dlja ego osushestvlenija / S.G. Lakirev, Ja.M. Hil'kevich, S.V. Sergeev. A.s. №1664412 SSSR, MKI V 06 V 1/16 №4414912/24-28; zajavl: 24.04.88; opubl. 23.07.91, Byul. №27. 5 s. [in russian].
10. Sposob vozbuzhdenija kolebanii / S.V. Sergeev, B.A. Pat. 2476275 Ros. Federacija, MPK8 V 06 V 1/16 №2011132718/28; zajavl. 03.08.2011; opubl. 27.02.2013, Byul. №6. 14 s. [in russian].

Сведения об авторах

Сергеев С.В., канд. техн. наук, проф., зав. кафедры «Технологические процессы и оборудование машиностроительного производства» ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ), филиал, г. Усть-Катав, Российская Федерация

S.V. Sergeev, Ph.D., prof., head of chair “Production technology and equipment production engineering” FSBEI HPE “South Ural state university” (national research university), branch Ust-Katav, Russian Federation

Сергеев Ю.С., канд. техн. наук, доцент кафедры «Электропривода и автоматизации производственных процессов» ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ), филиал, г. Златоуст, Российская Федерация

Yu.S. Sergeev, Ph.D., assistant prof. of chair chair “Drive and automation of industrial processes” FSBEI HPE “South Ural state university” (national research university), branch, Zlatoust, Russian Federation

Решетников Б.А., канд. техн. наук, проф. кафедры «Технологические процессы и оборудование машиностроительного производства» ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ), филиал г. Усть-Катав, Российская Федерация

B.A. Reshetnikov, Ph.D., prof., of chair “Production technology and equipment production engineering” FSBEI HPE “South Ural state university” (national research university), branch Ust-Katav, Russian Federation

e-mail: sergeev-sv@list.ru