

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ИЗГИБА КОЛОННЫ ШТАНГ В НЕФТЯНЫХ СКВАЖИНАХ <sup>1</sup>

Саттаров И.Р.

ООО "П-Д Татнефть-Алабуга Стекловолокно"  
pdt\_alabuga@mail.ru

*В статье приводятся теоретические расчеты напряжений от изгиба колонны штанг в скважинах при ходе балансира станка-качалки вниз. Получены зависимости для определения шага винтовой линии колонны, образующейся в результате сопротивлений при движении колонны, а также напряжений, возникающих в металле штанг. Задача решена с учетом провисания колонны.*

Ключевые слова: изгиб, колонна, напряжение, насосные штанги, искривленная скважина.

### Введение

Эксплуатация глубиннонасосных скважин, как правило, сопровождается изгибом штанг, как от искривления ствола, так и от сжатия в нижней части колонны при ее ходе вниз.

В [2] приведены результаты расчета напряжений в колонне штанг при ходе насоса вверх для искривленных скважин.

Рассмотрим некоторые геометрические соотношения и уравнения равновесия. Введем правую систему декартовых координат  $x, y, z$  с ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , в которой единичные горизонтальные векторы  $\vec{i}, \vec{j}$  направлены по странам света, соответственно, на север и на восток, а  $\vec{k}$  вертикально вниз, в сторону силы тяжести (рис. 1).

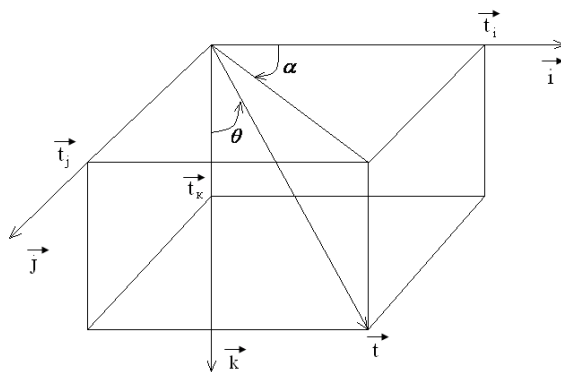


Рисунок 1. Система неподвижных координат

<sup>1</sup> Работа была выполнена в аспирантуре Альметьевского государственного нефтяного института

Радиус-вектор оси скважины определим в виде функции расстояния  $s$  вдоль ее оси:

$$\vec{r}(s) = \vec{i} \cdot x(s) + \vec{j} \cdot y(s) + \vec{k} \cdot z(s).$$

С осью скважины связан естественный трехгранник: единичные векторы касательной, нормали и бинормали:

$$\vec{t} = \vec{r}', \vec{n} = \vec{t}' / K, \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n},$$

где штрихом обозначены производные по длине оси скважины,  $K = |\vec{t}'|$  – кривизна оси скважины, а бинормаль определяется векторным произведением касательной и нормали.

Векторы трехгранника в введенной неподвижной системе координат определяются по инклинометрическим данным через зенитный и азимутный углы  $\theta(s)$ ,  $\omega(s)$ . Проекция вектора касательной имеют вид:

$$t_1 = \sin \theta \cdot \cos \omega, t_2 = \sin \theta \cdot \sin \omega, t_3 = \cos \theta, (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \omega \leq 2\pi).$$

Кривизна оси скважины определяется выражением [1]:

$$K = \sqrt{\theta'^2 + (\sin \theta \cdot \omega')^2}. \quad (1)$$

Для проекций нормали имеем:

$$K \cdot n_1 = \cos \theta \cdot \cos \omega \cdot \theta' - \sin \theta \cdot \sin \omega \cdot \omega',$$

$$K \cdot n_2 = \cos \theta \cdot \sin \omega \cdot \theta' + \sin \theta \cdot \cos \omega \cdot \omega',$$

$$K \cdot n_3 = -\sin \theta \cdot \theta'.$$

В случае прямой скважины, когда  $K = 0$ , примем:

$$n_1 = \cos \theta \cdot \cos \omega,$$

$$n_2 = \cos \theta \cdot \sin \omega,$$

$$n_3 = -\sin \theta.$$

Аналогично могут быть выражены и проекции бинормали.

Проекция вектора  $\vec{k}$  на оси естественного трехгранника также выражаются через инклинометрические данные:

$$k_1 = \cos \theta, k_2 = -\sin \theta \cdot \theta' / K, k_3 = \sin^2 \theta \cdot \omega' / K.$$

Для прямой скважины имеем  $k_1 = \cos \theta, k_2 = -\sin \theta, k_3 = 0$ .

В статье будем считать, что ось колонны насосно-компрессорных труб (НКТ) совпадает с осью скважины.

Радиус-вектор оси колонны штанг  $\vec{r}_0(s)$  свяжем с радиусом-вектором оси скважины соотношением  $\vec{r}_0(s) = \vec{r}(s) + \vec{u}(s)$ , где  $\vec{u}(s)$  – отклонение оси штанг от оси НКТ удовлетворяет условиям:

$$\vec{u} \cdot \vec{t} = 0, |\vec{u}| \ll 1, |\vec{u}| \leq h_0, h_0 = 1/2(D_T - D_R).$$

Равенство нулю скалярного произведения  $\vec{u}$  и  $\vec{t}$  означает, что  $\vec{u}$  перпендикулярно  $\vec{t}$ . Здесь обозначены размеры  $D_T$  – внутреннего диаметра НКТ и  $D_R$  – диаметра штанг.

Для единичного вектора касательной к оси штанг  $\vec{t}_0 = \vec{t}'_0$  получаем:

$$\vec{t}_0 = \vec{t} + \vec{u}'.$$

Уравнение равновесия штанг имеет вид [2]:

$$El \cdot \vec{u}^{IV} - T^e \cdot \vec{u}'' = \vec{N} + \vec{F}$$

где:  $T^e = T + p$  – эффективное продольное усилие в колонне,  $T$  – внутреннее продольное усилие,  $p$  – давление жидкости в НКТ,  $S$  – площадь поперечного сечения штанги,  $S$  – модуль Юнга,  $I$  – момент инерции поперечного сечения штанг,  $\vec{F} = F_n \vec{n} + F_b \vec{b}$  – нормальная составляющая распределенной силы реакции стенки НКТ,  $\vec{N} = N_n \vec{n} + N_b \vec{b}$  – нормальная составляющая распределенных внешних сил, включающих вес штанг и эйлерову силу, вызванную натяжением колонны в искривленной скважине,  $N_n = \lambda q \cdot k_n + K \cdot T^e$ ,  $N_b = \lambda q \cdot k_b$ ,  $q$  – вес единицы длины штанг (с учетом веса муфт),  $\lambda = 1 - \lambda_f / \lambda_s$  – плавучесть,  $\lambda_s$ ,  $\lambda_{ff}$  – плотности стали и жидкости, заполняющей НКТ.

Впервые расчет изгиба колонны в форме винтовой спирали для вертикальной скважины был предложен А.Лубинским в 1961 году. Это решение получено для гладкой колонны, которая не имеет выступающих муфт. В работе [3] приведено это решение и исследованы также другие формы изгиба колонны без учета муфт. В статье [4] рассматривается продольный изгиб в наклонно направленных скважинах тоже безмуфтовых колонн.

Наличие муфт приводит к увеличению неравномерности деформации вдоль колонны, что может вызвать увеличение изгибных напряжений в штангах. Настоящая статья посвящена исследованию равновесия штанг внутри НКТ в вертикальных и наклонно направленных скважинах с учетом влияния муфт при сжатии колонны.

## 1. Постановка задачи. Уравнения равновесия и граничные условия

В статье рассматривается колонна, которая касается всеми муфтами стенок насосно-компрессорных труб (НКТ), а также может касаться и прилегать к НКТ телом штанг. Будем также считать, что трение между штангами и НКТ отсутствует.

В начале рассматривается двумерный, спиральный изгиб в вертикальной скважине, а затем одномерный изгиб колонны в произвольно искривленной скважине. Одномерный изгиб характеризуется тем, что ось штанги отклоняется в одну сторону, в направлении боковой силы. При одномерном изгибе граничные условия такие же, как при растяжении колонны и имеют тот же геометрический и физический смысл. Рассмотрение прямой вертикальной скважины благодаря симметрии задачи позволит сформулировать граничные условия для отклонения штанг в двумерном случае.

Ниже сделан анализ влияния на напряженное состояние штанг искривления самой скважины и спирального изгиба колонны штанг внутри НКТ, что позволит определить условия, при которых наибольшие напряжения в штангах вызваны искривлением скважины или пространственным изгибом штанги внутри НКТ. При этом в обоих случаях основным фактором, вызывающим неравномерность деформации и концентрацию напряжений, являются муфты.

Как отмечено, колонна даже при небольшом сжатии теряет устойчивость. Методы определения критического значения сжимающего усилия зависят от граничных условий и способа приложения нагрузки [5].

В [6] отмечены три метода статического анализа: метод равновесия, метод несовершенств и энергетический метод.

В методе равновесия критическая нагрузка определяется как нагрузка, при которой наряду с первоначальной появляется смежная форма.

В методе несовершенств предполагается, что исследуемая конструкция имеет начальное отклонение от правильной формы (эксцентриситет или боковая нагрузка). В этом случае найденная равновесная деформация конструкции неограниченно возрастает при приближении нагрузки к критическому значению.

В третьем методе исследуется полная энергия системы, включающая внутреннюю энергию деформации конструкции и работу, производимую приложенными силами. Согласно принципу минимума потенциальной энергии из возмож-

ных равновесных форм системы реально осуществляется та, при которой вариация деформации около равновесного состояния приводит к увеличению ее потенциальной энергии.

Продольная нагрузка, прилагаемая к колонне штанг, имеет консервативный характер. Поэтому в данном исследовании статические методы позволяют найти решение задачи.

При сжатии колонны вследствие потери устойчивости может существовать несколько форм равновесия при равных усилиях. В частности, различные формы существуют при увеличении и при уменьшении нагрузок (явление гистерезиса). Здесь ограничимся тремя формами прогиба штанги, аналогичными случаю растяжения [2].

### 1.1 Провисающая часть штанги

Наличие муфт приводит к тому, что при любых нагрузках всегда часть штанги провисает, не касаясь стенки НКТ.

Уравнение равновесия сжатой колонны штанг, когда  $T < 0$ , имеет вид:

$$\vec{U}^{IV} + \alpha^2 U'' = \hat{N} + \hat{F}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-T^e}{EI}}, \quad |U| < 1, \quad (2)$$

где, как и в [1],

$$\vec{U} = Y \cdot \vec{n}_N + Z \cdot \vec{b}_N, \quad \vec{N} \cdot \vec{n} = N, \quad \vec{N} \cdot \vec{b} = 0.$$

Как и в [2] будем считать, что изменение вдоль колонны нагрузок происходит на расстояниях, превышающих в несколько раз длину штанг и поэтому в пределах одной штанги нагрузки постоянны.

Решение задачи при растяжении колонны сводилось в введенной вспомогательной системе координат  $\vec{n}_N, \vec{b}_N$  к одномерному случаю. При продольном сжатии вследствие потери устойчивости формы колонны изгиб штанг в общем случае описывается двумя компонентами.

На провисающей части штанги, где реакция стенки НКТ  $F$  отсутствует, общее решение уравнения имеет вид

$$Y = c_0 + c_1 X + c_2 \cos \alpha X + c_3 \sin \alpha X + \tilde{N} \frac{X^2}{2}, \quad \tilde{N} = \hat{N} / \alpha^2, \quad (3)$$

$$Z = b_0 + b_1 X + b_2 \cos \alpha X + b_3 \sin \alpha X. \quad (4)$$

## 1.2 Прилегающая часть штанги

### 1.2.1 Уравнение равновесия

В этом случае имеем уравнение:

$$\vec{U}_1^{IV} + \alpha^2 \vec{U}_1^{II} = \hat{N} + \hat{F}, \quad |\vec{U}|=1. \quad (5)$$

Условие  $|\vec{U}|=1$ , означающее, что штанга прилегает к стенке НКТ, свидетельствует о существенной нелинейности задачи.

Для удовлетворения этого условия компоненты смещения оси штанги представим в виде

$$Y_1 = \cos f(x), \quad Z_1 = \sin f(x). \quad (6)$$

Так как смещение оси штанги нормально стенке, то для касательной имеем

$$\vec{b}_1(x) = \vec{t} \times \vec{U}_1(x).$$

Отсутствию трения между штангой и НКТ в тангенциальном направлении соответствует условие для проекции силы взаимодействия

$$F_b = \vec{F} \cdot \vec{b}_1 = 0. \quad (7)$$

Чтобы прилегающий участок был прижат к стенке НКТ, необходимо

$$F_n = \vec{F} \cdot \vec{U}_1 < 0. \quad (8)$$

Для производных смещения находим следующие выражения

$$\vec{U}_1' = f' \vec{b}_1, \quad \vec{U}_1'' = f''' \vec{b}_1 - f'^2 \cdot \vec{U}_1, \quad (9)$$

$$\vec{U}_1''' = (f'''' - f'^3) \cdot \vec{b}_1 - 3 f' f'' \cdot \vec{U}_1, \quad (10)$$

$$\vec{U}_1^{IV} = (f^{IV} - 6 f'^2 \cdot f'') \cdot \vec{b}_1 - (4 f''' f' + 3 f''^2 - f'^4) \cdot \vec{U}_1. \quad (11)$$

Из уравнения равновесия получаем для силы реакции стенки НКТ

$$\hat{F} = -\hat{N} + \vec{U}_1^{IV} + \alpha^2 \vec{U}_1^{II}. \quad (12)$$

Подставляя сюда предыдущие выражения, находим для компонент силы реакции

$$\hat{F}_n = -(4 f''' \cdot f' + 3 f''^2 - f'^4 + \alpha^2 f'^2) - \hat{N} \cos f, \quad (13)$$

$$\hat{F}_b = -(f^{IV} - 6 f'^2 \cdot f'' + \alpha^2 f''^2) + \hat{N} \sin f. \quad (14)$$

Из условия  $F_b = 0$  получаем дифференциальное уравнение

$$f^{IV} - 6 f'^2 \cdot f'' + \alpha^2 f''^2 + \hat{N} \sin f = 0. \quad (15)$$

Общий интеграл этого уравнения содержит четыре постоянные интегрирования. Если ограничиться симметричным решением, то останутся только две постоянные интегрирования. Так как на прилегающем участке задача существенно нелинейна, то решение в конечном виде не существует. Из симметрии задачи следует  $f(-x) = -f(x)$ .

### 1.2.2 Решение уравнения с помощью ряда

Будем искать решение в виде степенного ряда

$$f(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^{2i+1}. \quad (16)$$

Вследствие антисимметрии функции  $f(x)$  сюда входят только нечетные степени, в качестве постоянных интегрирования примем коэффициенты  $a_0, a_1$ . Остальные коэффициенты ряда определяются из дифференциального уравнения. Число членов ряда определяет точность решения задачи.

Выпишем соотношения для производных ряда

$$f' = \sum_{i=0}^N \alpha_1 x^{2i}, \alpha_1 = a_1(2i+1), i=0, \dots, N; \quad (17)$$

$$f'' = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_2 x^{2i+1}, \alpha_2 = \alpha_1(2i+2), i=0, \dots, N-1; \quad (18)$$

$$f''' = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_3 x^{2i}, \alpha_3 = \alpha_2(2i+1), i=0, \dots, N-1; \quad (19)$$

$$f^{IV} = \sum_{i=0}^{N-2} \alpha_4 x^{2i+1}, \alpha_4 = \alpha_3(2i+1), i=0, \dots, N-2. \quad (20)$$

Для входящих в уравнение слагаемых получаем:

$$f'^2 = \sum_{i=0}^{2N} c_i x^{2i}, c_i = \sum_{k=0}^i \alpha_1 \alpha_{i-k}, \quad (21)$$

$$f'' \cdot f'^2 = x \sum_{i=0}^{2N-1} e_i x^{2i}, e_i = \sum_{k=0}^i c_k \alpha_{2i-k}.$$

Разложим также  $\sin f(x)$  в ряд по степеням  $X$ :

$$\sin f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} f^{2n+1}.$$

Для степеней  $f$  при  $n \geq 1$  имеем:

$$f^{2n+1} = x^{2n+1} \sum_{i=0}^{(2n+1)} g_i, n^{x^{2i}}, g_i, n = \sum_{k=0}^i \alpha \theta_k b_{i-k}, n;$$

$$b_{i,1} = \sum_{k=0}^i \alpha \theta_k \alpha \theta_{i-k}, b_{i,n+1} = \sum_{k=0}^i b_{k,1} b_{i-k}, n (i = 0, \dots, 2nN).$$

В результате находим:

$$\sin f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i x^{2i+1}, d_i = \alpha \theta_i + \tilde{d}_i, \quad (22)$$

$$\tilde{d}_0 = 0, \tilde{d}_i = \sum_{k=1}^i \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} g_{i-k}, k, (i = 1, \dots, \infty).$$

Подставляя полученные выражения в дифференциальное уравнение и, собирая члены с одинаковой степенью  $X$ , получим систему уравнений для коэффициентов разложения функции  $f$ . При степени  $x^{2i+1}$  имеем

$$\alpha A_i - 6 e_i + \alpha^2 \alpha 2_i + N d_i = 0, 0 \dots N - 2. \quad (23)$$

Эта рекуррентная система уравнений позволяет последовательно вычислить через значения  $\alpha \theta_0$  и  $\alpha \theta_1$  все коэффициенты разложения. Для краткости запишем:

$$\alpha A_i = A_i, \alpha \theta_{i+2}, A_i = (2_i + 2)(2_i + 3)(2_i + 4)(2_i + 5).$$

Тогда система уравнений приобретает вид:

$$\alpha \theta_{i+2} = \frac{1}{A_i} (6 e_i - \alpha^2 \alpha 2_i - N d_i), i = 0, \dots, N - 2. \quad (24)$$

### 1.3 Граничные условия

Если рассматривать одномерное смещение штанги, то условия при сжатии колонны такие же, как в случае ее растяжения. В случае произвольной пространственной формы оси скважины граничные условия для отдельной штанги при сжатии колонны в общем случае установить не представляется возможным. Здесь для исследования двумерного смещения сформулируем условия в вертикальной скважине.

В соответствии с постановкой задачи будем рассматривать колонну, которая касается всеми муфтами стенок насосно-компрессорных труб (НКТ). Будем считать, что вследствие потери устойчивости колонны муфты располагаются на



некоторой винтовой линии. Используя симметрию задачи, определим граничные условия для отклонения штанг.

Для винтовой линии, проходящей через середины муфт, имеем радиус-вектор (рис. 2):

$$\vec{r}_0 = \vec{t} \cdot s + \vec{u}(s), \quad \vec{u}(s) = h_1 \cdot \vec{n}_s(s), \quad (25)$$

где  $\vec{t}$  – единичный вектор направления оси НКТ на рассматриваемом участке, а  $\vec{n}_s(s)$  – единичный вектор отклонения точек винтовой линии от оси НКТ:

$$\vec{n}_s(s) = \vec{n}_N \cos \frac{2\pi}{L} s + \vec{b}_N \sin \frac{2\pi}{L} s. \quad (26)$$

Здесь  $L$  – шаг винтовой линии. Направление линии (правая или левая) не влияет на напряженное состояние штанг.

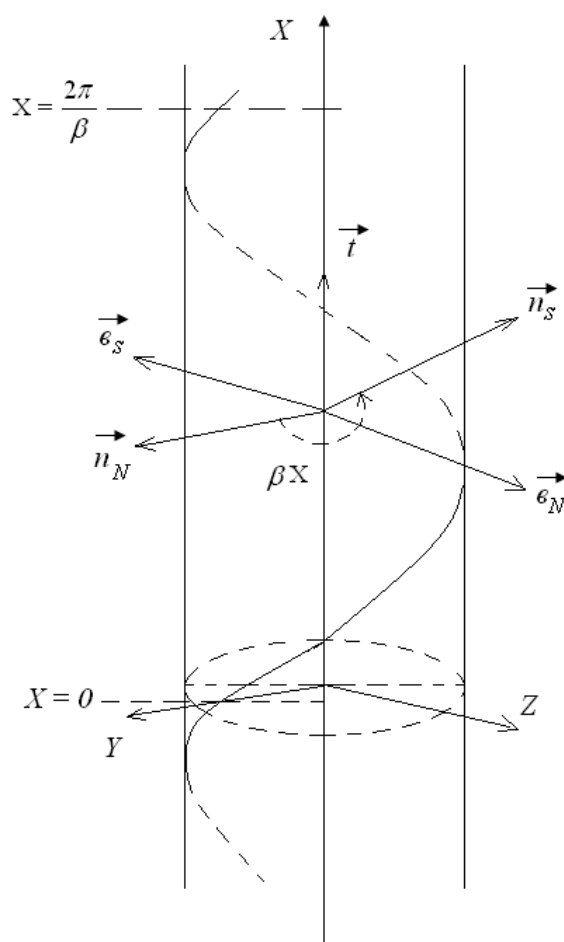


Рисунок 2. Оси координат и схема винтового изгиба штанги

В безразмерных координатах имеем:

$$\vec{n}_s(x) = \vec{n}_s \cos \beta x + \vec{b}_N \sin \beta x, \quad \beta = \pi \frac{b}{L}. \quad (27)$$

Введем также единичный вектор, перпендикулярный  $\vec{t}$  и  $\vec{n}_s$ , лежащий в плоскости, параллельной поверхности НКТ (рис. 1):

$$\vec{b}_s(x) = -\vec{n}_N \sin \beta x + \vec{b}_N \cos \beta x. \quad (28)$$

Обозначим проекции отклонения оси штанг на эти вектора  $Y_s = \vec{v} \cdot \vec{n}_s$  и  $Z_s = \vec{v} \cdot \vec{b}_s$ .

Вследствие принятого предположения о постоянстве продольной нагрузки (достаточно медленного изменения) проекции отклонения оси штанг от винтовой линии имеют период, равный длине штанги. При этом проекция  $Y_s$  симметрична, а  $Z_s$  антисимметрична относительно муфта при  $X = 1$ :

$$Y_s(1+x) = Y_s(1-x), \quad z_s(1+x) = -z_s = -z_s(1+x) = -z_s(1-x).$$

Исходя из этих соотношений, находим граничные условия. При этом будем также учитывать непрерывность смещения оси штанг, а также его первой и второй производных.

Кроме того, используем соотношения между функцией и ее производной для непрерывных функций. Если функция симметрична относительно некоторой точки  $x_*$ , т.е.  $f_s(x_*+x) = f_s(x_*-x)$ , то ее первая производная  $f_v(x) = f'_s(x)$  антисимметрична  $f_v(x_*+x) = -f_v(x_*-x)$ . И, наоборот, для антисимметричной функции ее производная симметрична. Также учтем, что значение непрерывной антисимметричной функции в точке  $x_*$  равно нулю  $f_v(x_*) = 0$ .

Используем также соотношения для винтовой линии:

$$\vec{n}'_s = \beta \vec{b}_s, \quad \vec{b}'_s = -\beta \vec{n}_s. \quad (29)$$

Из антисимметрии компоненты отклонения  $Z_s$  следует  $\vec{v} \cdot \vec{b}_s = 0$ .

Из симметрии  $Y_s$  следует антисимметрия  $Y'_s$  и, следовательно,

$$Y'_s(\pm 1) = 0. \quad (30)$$

Дифференцируя, получаем:

$$(\vec{v} \cdot \vec{n}_s)' = \vec{v}' \cdot \vec{n}_s + \vec{v} \cdot \vec{n}'_s. \quad (31)$$

Учитывая предыдущие соотношения, имеем  $\vec{v}' \cdot \vec{b}_s = 0$ .

Дифференцируя дважды антисимметричную компоненту, находим:

$$Z'_s = \vec{v}'' \cdot \vec{b}_s - 2\beta \vec{v}' \cdot \vec{n}_s + \beta^2 \vec{v} \cdot \vec{b}_s = 0. \quad (32)$$

С учетом предыдущих результатов, получаем  $\vec{v}'' \cdot \vec{b}_s = 0$ ,

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_s = H_1, \vec{v} \cdot \vec{b}_s = 0, \vec{v}' \cdot \vec{n}_s = 0, \vec{v}'' \cdot \vec{b}_s = 0, \quad (33)$$

Эти условия имеют следующую геометрическую интерпретацию. Первые два условия определяют величину и направление отклонения колонны в местах касания муфт с НКТ. Третье условие показывает, что поворот колонны возможен только в плоскости, параллельной к поверхности НКТ. Последнее условие означает, что в точке касания муфты имеется перегиб штанговой колонны в указанной плоскости.

При известном шаге винтовой линии полученных граничных условий достаточно, если штанги между муфтами провисают, не касаясь стенки НКТ. В других случаях нужно учитывать также условия в местах касания тела штанг с НКТ и условия сопряжения, если есть прилегающая часть штанги. Такие условия будут рассмотрены далее.

Вследствие симметрии задачи относительно середины штанги вместо граничного условия при  $X = -1$  можно учесть условие при  $X = 0$ . Условие в середине штанги будет применено также далее в случае касания НКТ.

Аналогично выводу условий при  $X = 1$  находим при  $X = 0$ :

$$\vec{v} \cdot \vec{b}_s = 0, \vec{v}' \cdot \vec{n}_s = 0, \vec{v}'' \cdot \vec{b}_s = 0.$$

Четвертое условие получаем, учитывая антисимметрию выражения  $(\vec{v} \cdot \vec{n}_s)''''$ .

Напомним, что третья производная терпит разрыв только в местах касания с НКТ муфт или штанг, где действуют сосредоточенные силы реакции. В случае провисания штанги она непрерывна, поэтому здесь  $(\vec{v} \cdot \vec{n}_s)'''' = 0$ . Дифференцируя, находим:

$$(\vec{v} \cdot \vec{n}_s)'''' = (\vec{U}'''' - \beta^2 \vec{U}'') \vec{n}_s + \beta (3 \vec{U}''' - \beta^2 \vec{U}') \cdot \vec{\beta}_s. \quad (34)$$

Отсюда следует:

$$\vec{v}'''' \cdot \vec{n}_s = 0. \quad (35)$$

Геометрическая интерпретация условий при  $X=0$  также основана на симметрии задачи. Первые два условия означают, что отклонение середины штанги

направлено к винтовой линии и имеет максимальное значение. В случае муфты при  $X = 1$  такое условие соответствует минимуму отклонения. Третье условие, как и в случае муфты, означает, что в середине штанги имеется точка перегиба в плоскости, параллельной касательной плоскости к поверхности НКТ. Четвертое условие соответствует отсутствию перерезывающей силы в направлении винтовой линии.

#### 1.4. Уравнение для шага винтовой линии.

Выведем уравнение для определения шага винтовой линии на основе принципа минимума потенциальной энергии.

Полная энергия единицы длины колонны штанг равна:

$$П = V + T^e \cdot \varepsilon .$$

где  $V$  – потенциальная энергия изгиба единицы длины колонны,  $\varepsilon$  – продольная деформация. Параметр винтовой линии определяется из условия равновесия  $dП = 0$ , где вариация энергии берется по искомому параметру.

Потенциальная энергия изгиба определяется через кривизну оси штанг:

$$V = \frac{1}{2} EI \cdot k_0^2 .$$

Переходя к принятым единицам измерения, получаем:

$$V = \frac{8EI}{e^4} k_0^2, \quad k_0 = |\vec{v}''| .$$

Для продольной деформации вследствие изгиба штанг имеем:

$$\varepsilon = \frac{2h_0^2}{e^2} \varepsilon, \quad \varepsilon = |\vec{v}'|^2 .$$

Для полной энергии получаем выражение:

$$П = \frac{8EIh_0}{e^4} П, \quad П = k_0^2 - \alpha^2 \varepsilon .$$

и уравнение для параметра, характеризующего шаг винтовой линии:

$$d_{\beta} \hat{П} = 0 .$$

Определим с помощью полученного уравнения винтовую линию для гладкой колонны, не имеющей муфт. Для винтовой линии, лежащей на цилиндрической поверхности радиуса  $H$  имеем  $\vec{v} = H \vec{r}_s(x)$ .

Для кривизны, деформации и полной энергии получаем:

$$\hat{k}_0 = H \beta^2,$$

$$\hat{\varepsilon} = H^2 \beta^2,$$

$$\hat{\Pi} = H^2 (\beta^4 - \alpha^2 \beta^2).$$

Из уравнения равновесия находим  $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ . В размерном виде для шага винтовой линии имеем:

$$L = 2\pi \sqrt{\frac{2EI}{-T^e}}.$$

Этот результат совпадает с полученным в [2]. Отметим, что величина шага винтовой линии в этом случае не зависит от радиуса труб. Для силы реакции стенки НКТ имеем  $F = -\alpha^4/4$ .

## 2. Изгиб штанг в вертикальной скважине. Провисание штанги

Для компонент  $Y, Z$  граничные условия при  $X = \pm l$  записываются в виде:

$$Y(\pm 1) \cos \beta \pm z(\pm 1) \sin \beta = H_1; \pm Y(\pm 1) \sin \beta + z(\pm 1) = 0,$$

$$Y'(\pm 1) \cos \beta \pm Z'(\pm 1) \sin \beta = 0,$$

$$Z''(\pm 1) \cos \beta \pm Y''(\pm 1) \sin \beta = 0.$$

Подставляя сюда общее решение, получаем 8 линейных уравнений для коэффициентов  $c_i$ ,  $b_i c_i = 0, \dots, 3$ . Величина  $\beta$  входит в уравнения нелинейно и определяется с помощью 9-го уравнения, определяющего минимум энергии колонны.

Как отмечалось, вследствие симметрии задачи относительно середины штанги вместо граничного условия при  $X = -l$  можно учесть условие при  $X = 0$ .

Для компонент  $Y, Z$  граничные условия при  $X = 0$  и  $X = l$  записываются в виде:

$$Z = 0, Y' = 0, Z'' = 0, Y''' = 0.$$

Подставляя общее решение в граничные условия при  $X = 0$  и  $X = l$ , имеем уравнения для коэффициентов.

В результате решения этой системы уравнений получаем:

$$\Delta_1 = \alpha \sin^2 \alpha - (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \sin^2 \beta,$$

$$\Delta_{c_2} = H^1 \sin \alpha \cos \beta H l, c_2 = \Delta_{c_2} / \Delta_1,$$

$$\Delta_{b_3} = H_1 \cos \alpha \sin^3 \beta,$$

$$b_3 = \frac{\Delta b_3}{\Delta_1},$$

$$b_{11} = H_1 \sin \beta - b^3 \sin \alpha,$$

$$c_1 = 0; c_3 = 0; b_0 = 0; b_2 = 0.$$

Таким образом, отклонение оси штанги имеет вид:

$$Y = c_0 + c_2 \cos \alpha x, z = b_1 x + b_3 \sin \alpha x.$$

Величину  $\beta$ , характеризующую шаг винтовой линии определим с помощью энергетического соотношения.

Кривизна и продольная деформация штанги вследствие изгиба равны:

$$\hat{k}_0^2 = Y''^2 + Z''^2,$$

$$\hat{\varepsilon} = Y'^2 + Z'^2.$$

Так как кривизна и деформация вдоль штанги изменяются, то для определения энергии штанги эти величины нужно проинтегрировать по ее длине. В результате для энергии единицы длины штанги имеем выражение.

Входящие сюда величины представляются в виде:

$$Y''^2 - \alpha^2 Y'^2 = c \frac{2}{2} \alpha^4 (\cos^2 \alpha x - \sin^2 \alpha x),$$

$$Z''^2 - \alpha^2 Z'^2 = b \frac{2}{3} \alpha^4 (\sin^2 \alpha x - \cos^2 \alpha x) - \alpha^2 (b \frac{2}{1} + 2 b_1 b_3 \alpha \cos \alpha x),$$

Подставив эти выражения, проинтегрировав и произведя преобразования тригонометрических функций, получаем:

$$\hat{\Pi} = (c \frac{2}{2} - b \frac{2}{3}) \alpha^3 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \alpha^2 b_1 b_3 \sin \alpha - b \frac{2}{1} \alpha^2.$$

Так как входящие в выражение энергии коэффициенты имеют вид:

$$c_2 = \frac{\Delta c_2}{\Delta_1}, b_3 = \frac{\Delta b_3}{\Delta_1}, b_1 = \frac{\Delta b_1}{b_2},$$

то введем функцию  $\Pi_1 = \hat{\Pi} \cdot \Delta \frac{2}{1}$ , в которой вместо коэффициентов входят  $\Delta c_2, \Delta b_3, \Delta b_1$ .

Подставляя соответствующие выражения, получаем:

$$\tilde{\Pi}_1 = -t^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + t^2 \sin^2 \alpha (2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - t \alpha \sin^4 \alpha.$$

где обозначено  $t = \sin^2 \beta$ ,  $\tilde{\Pi}_1 = \Pi_1 / \alpha^3$ .

Уравнение равновесия колонны принимает вид  $\Delta_1 d \tilde{\Pi} - 2 \tilde{\Pi} d \Delta_1 = 0$ , где используется дифференцирование по параметру  $t$ .

Предыдущие соотношения справедливы в области, где  $\Delta_1$  не обращается в нуль.

Произведя необходимые преобразования и некоторые сокращения, находим уравнение для  $t$

$$A^2 t^3 - 3 \alpha A B t^2 + \alpha B^2 (2A + \alpha) t - \alpha^2 B^3 = 0,$$

где  $A = -\alpha - \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $B = \sin^2 \alpha$ .

Это кубическое уравнение в общем случае имеет 3 решения. Сведем уравнение к канонической форме с помощью подстановки  $t = y + z$ ,  $z = \frac{\alpha B}{A}$ .

В результате получаем уравнение:

$$y^3 + py = 0, \quad p = -\alpha \sin \alpha \cos \alpha \frac{B^2}{A^2}.$$

При  $\alpha < \left(\frac{P}{2}\right)$  имеем  $P < 0$  и дискриминант уравнения  $D = \left(\frac{P}{2}\right)^3 < 0$ .

Так как дискриминант отрицателен, то имеется три действительных различных корня [6]:

$$y_{1,2} = \pm 2 \sqrt{\frac{|P|}{3}} \cos \frac{\pi}{6}, \quad y_3 = 0.$$

Так как  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , то имеем:

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{|p|}, \quad y_{1,2} = z \pm \sqrt{|p|}, \quad t_3 = z.$$

Выбор нужного решения определяется его поведением при малой нагрузке.

При  $\alpha \ll 1$  можно получить:

$$z = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{15} \alpha^2\right), \quad \sqrt{|p|} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{7}{15} \alpha^2\right).$$

Следовательно:

$$t_1 = \frac{\alpha^2}{2}, \quad t_2 = 3 \left(1 - \frac{3}{10} \alpha^2\right), \quad t_3 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{15} \alpha^2\right).$$

Так как при  $\alpha \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow 0$ , то физический смысл имеет первое решение  $t = t_1$ . Так как при  $\beta \ll 1$   $\sin \beta \approx \beta$ , то при  $\alpha \ll 1$  получаем:

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, шаг винтовой линии, по которой муфты касаются НКТ при малой продольной нагрузке совпадает с шагом гладкой колонны, прилегающей на всем протяжении к НКТ.

При произвольной нагрузке  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  получаем:

$$t = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} (\alpha - \sqrt{\alpha \sin \alpha \cos \alpha}), \beta = \arcsin \sqrt{t}, \text{ при } \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ находим:}$$

$$t \rightarrow 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \alpha}, \beta \rightarrow \frac{\pi}{2} - (1 - \frac{2}{\pi} \alpha)^{\frac{1}{4}}, \Delta_1 \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2} (\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$

Отсюда видно, что при  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$  имеет  $t = 0$  и  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta_1 = 0$ .

На рис. 3 построены зависимости  $t, \beta, \Delta_1$  от  $\alpha$ .

Так как  $\Delta_1 \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , то деформация штанги при этом неограниченно возрастает, что означает потерю устойчивости. Таким образом, штанги в колонне теряют устойчивость при таком же усилии, как штанга с шарнирно закрепленными концами. Шаг винтовой линии, на которой расположены муфты, при этом равен  $L = 2l$ . Для штанг длиной 8 м получаем  $L = 16$  м. Однако, так как отклонение штанг ограничено стенкой НКТ, то штанга принимает форму с касанием или прилеганием к НКТ при  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . Случай провисания штанги (форма 1) ограничен условием  $Y(0) < 1$ .

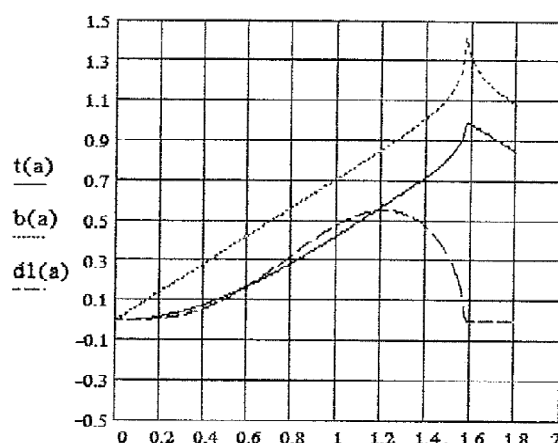


Рисунок 3. Зависимость параметра винтовой линии  $\beta$ , проходящей через муфты, и детерминанта  $\Delta_1$  от продольного сжатия  $\alpha$



Исследуем форму отклонения штанги при ее провисании. Как показано в [1], угол наклона оси штанги к оси НКТ равен:

$$\varphi = \frac{2h_0}{l} |\vec{v}'|.$$

Для винтовой линии  $h_1 \vec{n}_s(x)$ , проходящей через муфты и лежащей на цилиндрической поверхности радиуса  $h_1$ , находим:

$$v_1 = \frac{2h_1}{l} \beta.$$

Определим угол наклона к оси НКТ штанги в ее середине. Для этого находим:

$$\vec{v}'(0) = z'(0) \cdot \vec{b}_N = (b_1 + b_3 \alpha) \vec{b}_N.$$

Подставляя сюда значения коэффициентов при  $\alpha \ll 1$  находим:

$$\varphi(0) = \varphi_1 \left(1 - \frac{\alpha^4}{4}\right)$$

Таким образом, наклон к оси НКТ в середине штанги меньше, чем наклон винтовой линии, проходящей через муфты. Можно также убедиться, что наклон штанг возле муфты больше, чем наклон этой винтовой линии.

Сосредоточенные силы реакции НКТ в точках касания муфт определяются выражением

$$\vec{F}_1 = [\vec{v}''' + \alpha^2 \vec{v}']_{x=1}.$$

Вследствие непрерывности направления оси колонны  $[\vec{v}'] = 0$ . Здесь не рассматриваем предельный случай отсутствия жесткости при изгибе, когда  $EI = 0$  (случай нити) и  $[\vec{v}'] \neq 0$ . Поэтому для силы реакции имеем:

$$\vec{F}_1 = [\vec{v}'''].$$

Радиальная и тангенциальная составляющие силы реакции  $\vec{F}_{1_n} = \vec{F}_1 \cdot \vec{n}_s$ ,  $\vec{F}_{1_b} = \vec{F}_1 \cdot \vec{b}_s$  имеют вид:

$$\hat{F}_{1_n} = |\hat{\vec{v}}'''| \cdot \vec{n}_s, \hat{F}_{1_b} = |\hat{\vec{v}}'''| \cdot \vec{b}_s$$

Учитывая свойства симметрии и граничные условия, можно получить:

$$\hat{F}_{1_n} = -2 \hat{\vec{v}}'''(1) \cdot \vec{n}_s(1), \hat{F}_{1_b} = 0.$$

Равенство нулю тангенциальной составляющей силы реакции соответствует предположению об отсутствии трения. Для силы сжатия муфты к стенке НКТ имеем выражение через компоненты смещения:

$$\hat{F}_{1n} = -2[y'''(1)\cos\beta + Z'''(1)\sin\beta].$$

В качестве примера рассмотрим сжатие штанги диаметром 19 мм и длиной 8 м силой 200 Н в вертикальной скважине. При этом сжатие составляет 0,965 эйлеровой силы,  $\alpha = 1,543$  и  $\beta = 1,220$ , угол наклона винтовой линии равен 0,00321 радиана и шаг ее 20,6 м.

На рис. 4а показаны угол наклона и величина модуля отклонения оси штанги. На рис. 4б показана эпюра изгибных напряжений в штанге. Графики подтверждают указанный характер изгиба штанги. Отклонение оси и изгибное напряжение достигают наибольшего значения в середине штанги. Углы наклона в середине штанги и у муфты равны соответственно 0,00262 и 0,00636 радиана.

Для рассмотренного примера максимальное изгибное напряжение равно 4,6 МПа и превышает напряжение от продольного сжатия в 6,5 раз. Наличие муфт приводит к увеличению напряжения по сравнению с гладкой (без муфт) изогнутой колонной в 1,41 раза. Продольная деформация за счет изгиба штанг равна  $1,46E-5$  и превышает продольную деформацию вследствие осевого напряжения в 4,36 раз. Сила прижатия муфты 0,82 Н.

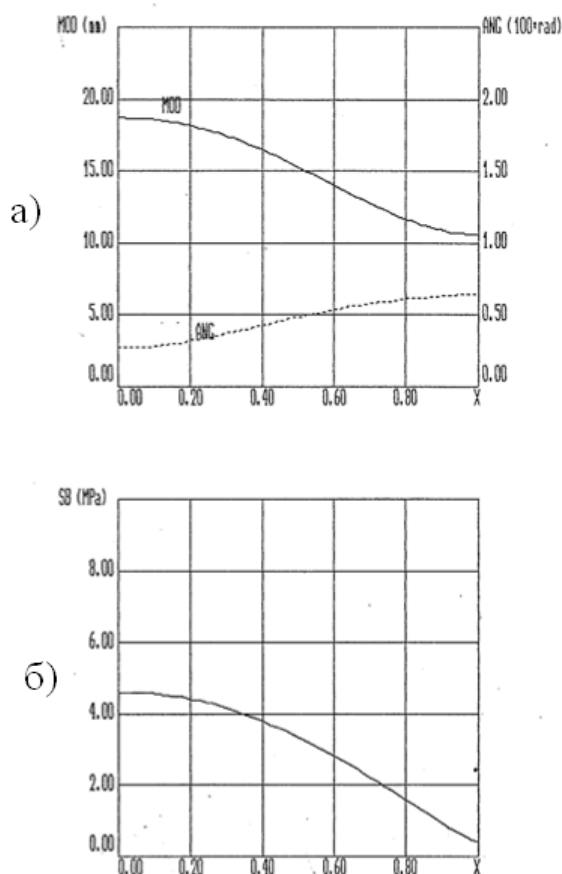


Рисунок 4. Прогиб штанги и изгибное напряжение при провисании штанги:  
 а - смещение MOD и угол наклона ANG оси штанги по отношению оси НКТ,  
 б - эпюра изгибных напряжений SB

### Выводы

1. Предложена постановка задачи и определены граничные условия для расчета напряжений в колонне насосных штанг при ходе головки балансира станка-качалки глубиннонасосной установки в условно-вертикальных скважинах с учетом образования винтовой линии, возникающей в результате сопротивлений движению.

2. Получены выражения для расчета шага винтовой линии, образуемой колонной насосных штанг при ходе вниз, а также напряжений от изгиба колонны. Приведены результаты расчета и графики напряжений для частных случаев технологического режима работы оборудования и конструкции колонны штанг.

### Литература

1. Борисов Ю.П., Пилатовский Ю.П., Табаков В.П. Разработка нефтяных месторождений горизонтальными и многозабойными скважинами. М.: Недра, 1964. 284 с.
2. Рамазанов Г.С., Уразаков К.Р., Песляк Ю.А. Изгиб и напряжение насосных штанг в наклонно направленных скважинах при натяжении колонны // Уфа: Баш. гос. научн. исслед. инст. нефти, 1999. 28 с. Деп. В ВИНТИ, 15.02.99. №484-В99.
3. Песляк Ю.А. Расчет напряжений в колоннах труб нефтяных скважин. М.: Недра, 1973. 216 с.
4. Miska S., Voik L. Analysis of drillpipe/coiled-tubing buckling in a constant-curvature wellbore. JPT, v.50, N5, 1998. PP. 66, 67, 77.
5. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
6. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1980. 974 с.