СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Поляков Б.Н.

Показывается сравнение статистических оценок параметров функций отклика, полученных для активного многофакторного эксперимента и при его планировании, и обосновывается недостаточная их надёжность для последнего.

В современной научной методологии математические методы планирования, в том числе, оптимальных экспериментов, занимают весьма достойное место в фундаментальных и прикладных научных исследованиях. Методы, впервые предложенные английским математиком Р. Фишером – информативны, продуктивны и экономичны и достаточно широко применяются для решения большого круга задач, в том числе, для изучения механизмов явлений, для организации и активного управления экспериментальными исследованиями в различных научных направлениях и отраслях промышленности, для создания математических моделей (функций отклика) технологических процессов объектов автоматизации и поиска их оптимальных режимов.

Математические методы планирования экспериментов – это «теория здравого смысла» впервые были применены и получили дальнейшее развитие при постановке и проведении экспериментальных исследований именно в металлургии в 50-е годы прошедшего столетия, благодаря всемирно известным научным трудам и практической деятельности в нелёгких условиях несвободы яркого российского учёного - математика проф. В.В. Налимова [1,2].

Эти популярные математические методы получили широкое распространение и в машиностроении, например, при проведении численных компьютерных экспериментов для решения задач оптимального проектирования, с позиций различных целевых функций (критериев качества) кованных, литых, сварных и термонагруженных конструкций и деталей сложных конфигураций металлургического, горного и нефте – бурового оборудования [3,4,5].

При всей безусловной эффективности методов планирования экспериментов считаем необходимым обратить внимание на некоторые математические особенности формируемых функций отклика – уравнений регрессии, в смыле точности и надёжности статистических оценок их параметров. Но следует отметить, что, по – существу, представляемая статья отнюдь не претендует на какие – либо новые теоретические (тем более математические) обобщения, а только на конкретном примере показывает, обычно скрытые от новичка – пользователя, эти особенности, на основе сопоставления статистических характеристик параметров уравнений регрессии, получаемых при активном многофакторном эксперименте (АМЭ) и при его планировании, обображённом в форме латинского квадрата (ЛК).

Основание для выполненного сравнительного анализа составила экспериментальная информация, полученная при исследовании на стенде уровня энергетических потерь в различных конструкциях узла уплотнения штока бурового насоса 13Гр при различном сочетании воздействующих факторов [6]. Объём исходной выборки при АМЭ составил 787 опытов, что значительно превосходит размер выборки полного факторного эксперимента. Затем из исходной выборки формировалась выборка, соответствующая латинскому квадрату.

Экспериментальная информация обеих выборок была обработана на ЭВМ по программам множественного регрессионного и корреляционного анализов [7].

Уравнения регрессии строились в виде линейного полинома в истинных координатах - $y = a_0 + \sum_1^4 a_i x_i$ и в логарифмических (позином) – $\ell n y = a_0 + \sum_1^4 a_i \ell n x_i$,

где:

y - сила трения в уплотнении в штоковой полости при нагнетании, $\times$ 10Н;

x_1 - давление перекачиваемой жидкости в цилиндре насоса, $\times$ 10Па;

x_2 - конструкция уплотнения (ОАО «Уралмаш» и других предприятий [6]);

$x_3 \cdot 10^2$- скорость перемещения штока, м/с;

$x_4 \cdot 10^{-2}$ - усилие предварительного поджатия уплотнения, $\times$ 10Н.

Результаты статистического анализа выборок – статистические характеристики функций отклика – уравнений регрессии представлены в табл. 1, а сравнение статистических оценок их параметров – в табл. 2. Анализ информации табл. 1 и 2 позволяет отметить следующее.

Все исследуемые факторы (независимые переменные) исходной выборки имеют нормальные функции распределения, при этом средние арифметические значения и дисперсии (в табл. 1- коэффициенты вариации) существенно не отличаются от аналогичных параметров выборки в форме латинского квадрата, а различия составляют всего ≈ 0,3÷2,6 %, т.е. в пределах ошибок измерений, что обосновывает правомерность применения регрессионного и корреляционного анализов.

Принятая схема латинского квадрата оказалась корректной, так как выборка ЛК формирует функцию отклика адекватную выборке АМЭ. Функции отклика также адекватно отображают теоретическую (или физическую) картину взаимодействия факторов и их влияние на зависимую переменную. Коэффициенты множественной корреляции уравнений регрессии отличаются несущественно в статистическом плане , хотя для ЛК их абсолютные величины явно завышены (0,778 > 0,632). Показатели значимости – коэффициенты частной корреляции качественно правильно отображают взаимосвязи и подтверждают несущественность факторов в выборке ЛК, но по абсолютной величине они существенно выше в сравнении с выборкой АМЭ. Кроме того, взаимосвязь между факторами в обеих выборках практически отсутствует, а имеющиеся коэффициенты взаимной корреляции существенно меньше коэффициентов частной корреляции, что повышает значимость последних. Поэтому ранжирование факторов по силе их влияния на зависимую переменную (в порядке понижения), устанавливается по абсолютным значениям величин коэффициентов частной корреляции, которые формируют их расположение, идентичным для обеих выборок, в следующей последовательности - x_1, x_4, x_3 и x_2. Фактор x_2 оказался несущественным для позиномов обеих выборок (см. табл. 1), после отбрасывания которого коэффициенты корреляции и регрессии и их 95 % - ные доверительные интервалы изменяются несущественно – всего в пределах 0,5 %.

© Нефтегазовое дело, 2007

Уравнения регрессии в форме позинома лучше описывают свойства выборок как для АМЭ, так и для ЛК: относительная величина стандартной ошибки оценки - $S/\bar{y}$, % меньше $\approx$ в 4,5 раза в сравнении с линейными полиномами в истинных координатах (см. табл. 2), а точность аппроксимации выборок практически одинакова (сравните – 10,2 % и 12 %), т.е. имеет место несущественность отличия абсолютных величин значений $S/\bar{y}$, % для АМЭ и ЛК, что объясняется практически отсутствием различий в диапазонах изменений данных наблюдений.

Итак, для функций отклика получены следующие уравнения регрессии:

- для выборки АМЭ -

$$y = 19{,}89 x_1^{0{,}23} x_2^{0{,}056} \left(x_3 \cdot 10^2\right)^{-0{,}11} \left(x_4 \cdot 10^{-2}\right)^{0{,}576},$$

- а для ЛК -

$$y = 23{,}48 x_1^{0{,}292} x_2^{-0{,}03} \left(x_3 \cdot 10^2\right)^{-0{,}29} \left(x_4 \cdot 10^{-2}\right)^{0{,}65}.$$

Главное отличие функции отклика при планировании эксперимента – в недостаточных точности и надёжности статистических оценок параметров уравнения регрессии – это широчайшие величины доверительных интервалов для абсолютно всех статистических параметров и точности аппроксимации, многократно превышающие величины подобных параметров для выборки АМЭ, а именно (см. табл. 2):

- для коэффициента множественной корреляции относительная величина (в %) ширины его 95 %-ного доверительного интервала - $\frac{\Delta R = R_2 - R_1}{R}$ или относительная величина его среднеквадратического отклонения - S_R/R,% $\approx$ в 3,6 раза;

- для всех коэффициентов регрессии относительная величина ширин их 95 %-ных доверительных интервалов - $\Delta a_i/a_i$,%- в диапазоне $\approx$ 2,0÷12,0 раз (без учёта несущественного фактора - x_2);

- для относительной величины стандартной ошибки оценки (точности аппроксимации выборки) - $S/\bar{y}$,% $\approx$ в 4,5 раза.

Итак, для выборки, спланированной в форме латинского квадрата, точность и надёжность статистических параметров функции отклика и их оценок резко снижаются.

Таким образом, при всех известных несомненно положительных качеств методов планирования экспериментов (в том числе, значительное сокращение количества опытов) имеется существенный недостаток – низкая точность и надёжность всех статистических параметров функции отклика и их оценок, что является объективным свойством малых выборок.

Представленный статистически оценочный взгляд на применение планирования эксперимента позволяет сделать следующие выводы:

- планирование эксперимента отображает функцию отклика адекватно АМЭ, а статистические параметры и оценки последней близки по величине аналогичным параметрам при АМЭ, но их точность и надёжность абсолютно недостаточны;

- выполненный анализ конкретно доказывает справедливость известного в математической статистике положения о том, что надёжность коэффициентов регрессии существенно зависит от количества наблюдений (величины выборки) и от стандартной ошибки оценки, или от точности, с которой уравнение регрессии описывает выборку, и кроме того, то, что невозможно одновременно достичь оптимума двух критериев качества: в нашем случае - значительно сократить количество измерений (наблюдений, опытов) и при этом получить высокую точность и надёжность результатов;

- так как при планировании эксперимента формируются широкие доверительные интервалы, в частности, для коэффициентов регрессии, величины которых могут составлять 50 и более процентов от абсолютной величины последних, и при этом быть несущественными (незначимыми), то методологически более правильно устанавливать существенность (статистическую значимость), а также рандомизацию факторов по абсолютным величинам коэффициентов частной корреляции;

- показанная недостаточная (даже низкая) надёжность коэффициентов корреляции и регрессии обосновывает целесообразность применять методы планирования только на начальном этапе экспериментальных исследований, после анализа результатов которого следует использовать, как минимум, полный факторный эксперимент, обеспечивающий получение более надёжных и точных статистических оценок параметров функции отклика;

- полный многофакторный и активный эксперимент - самый надёжный метод получения достоверной, точной и надёжной функции отклика.

Литература

1. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов.-М.:Физматгиз,1965, 340с.
2. Налимов В.В. Теория эксперимента. - М.: Наука.-1971, 208с.
3. Шенк Х.N. Теория инженерного эксперимента.-Пер.с англ.-М.: Мир, 1972, 381с.
4. Адлер Ю.П., Маркова, Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. - М.: Наука.-1976, 279с.
5. Поляков Б.Н. Повышение качества технологий, несущей способности конструкций, долговечности оборудования и эффективности автоматических систем прокатных станов. ISBN 5-98947-023-1. – СПб.: Реноме, 2006, - 528с.
6. Кугелев В.С., Поляков Б.Н. Определение энергетических потерь в уплотнении штока бурового насоса. Расчёт и конструирование нефтепромыслового оборудования. Труды ВНИИНЕФТЕМАШа. –М.: Машиностроение, 1975, 296 с.
7. Карлинская Ф.М., Макаров Ю.Д., Поляков Б.Н. Алгоритмы статистической обработки данных наблюдений с помощью ЭВМ: Реф.информ. № 15-70-5 / НИИинформтяжмаш. М., 1970, 46с.

Таблица 1

Статистические характеристики параметров уравнений регрессии при многофакторном эксперименте и при его планировании

Экспери-мент. объём выборки	Вид уравнения регрессии	y; x_i	x_{min}	x_{max}	$\bar{y}; \bar{x}_i$	V_{X_i} %	r_{1i}	R	S_R	R_1	R_2	S	a_i	$\alpha_{\pm 0,95}$
Много-факторный экспе-римент $n = 787$	$y = a_0 + \sum_1^4 a_i x_i$	y	18	888,0	271,6	67,7	-	0,592	0,023	0,547	0,638	148,3	24,1	34,52÷13,7
		x_1	2,5	254	105	73,6	0,524						1,18	1,32÷1,05
		x_2	1,0	5,0	3,12	45,6	0,163						17,43	24,8÷10,03
		$x_3 \cdot 10^2$	5,0	85,0	45,0	62,8	-0,136						-0,72	-0,35÷-1,08
		$x_4 \cdot 10^{-2}$	8,0	48,0	23,8	52,2	0,332						4,25	5,1÷3,41
	$\ell n y = a_0 + \sum_1^4 a_i \ell n x_i$	y	2,9	6,79	5,32	15,5	-	0,632	0,021	0,590	0,674	0,638	2,99	3,03÷2,94
		x_1	0,9	5,54	3,96	40,3	0,500						0,23	0,26÷0,20
		x_2*	0	1,61	1,0	56,7	0,049						0,056	0,136÷-0,02
		$x_3 . 10^2$	1,6	4,44	3,45	29,2	-0,167						-0,11	-0,06÷-0,15
		$x_4 . 10^{-2}$	2,1	3,87	3,01	19,9	0,473						0,576	0,65÷0,50
Планиро-вание - Латинский квадрат $n = 25$	$y = a_0 + \sum_1^4 a_i x_i$	y	18	775	252,6	69,8	-	0,731	0,104	0,527	0,935	120,3	45,72	98,44÷-7,01
		x_1	2,5	202	96,06	71,8	0,641						1,457	2,22÷0,69
		x_2*	1,0	5,0	3,0	47,1	0,127						10,89	48,18÷-26,4
		$x_3 . 10^2$	5,0	85,0	45,0	62,8	-0,40						-1,88	-0,014÷-3,743
		$x_4 . 10^{-2}$	8,0	40,0	24,0	47,1	0,422						4,95	9,608÷0,284
	$\ell n y = a_0 + \sum_1^4 a_i \ell n x_i$	y	2,9	6,65	5,24	16,3	-	0,778	0,088	0,605	0,951	0,537	3,156	3,39÷2,29
		x_1	0,9	5,31	3,89	40,6	0,652						0,292	0,441÷0,143
		x_2*	0	1,61	0,96	59,3	-0,03						-0,03	0,382÷-0,445
		$x_3 . 10^2$	1,6	4,44	3,45	29,2	-0,48						-0,29	-0,058÷-0,525
		$x_4 . 10^{-2}$	2,1	3,69	3,04	18,7	0,568						0,65	1,065÷0,24

*- несущественный фактор

Условные обозначения: n - объём выборки; $x_{\min}, x_{\max}$ - диапазоны изменения факторов; $\bar{y}, \bar{x}_i$ - средние арифметические значения y и x_i; V_{X_i} - коэффициент вариации; r_{1i} - коэффициент частной корреляции; R - коэффициент множественной корреляции; S_R - среднеквадратическое отклонение R; R_1 и R_2 - нижняя и верхняя границы 95 %-ого доверительного интервала R; S - стандартная ошибка оценки; a_i - коэффициенты регрессии; $\alpha_{\pm 0,95}$ - доверительные интервалы коэффициентов регрессии при доверительной вероятности α = 0,05.

Таблица 2

Сравнительные статистические оценки параметров функций отклика при многофакторном эксперименте и при планировании

Статистические оценки		Активный многофакторный эксперимент		Планирование эксперимента (латинский квадрат)	
		$y=a_0+\sum_1^4 a_i x_i$	$\ell ny=a+\sum_1^4 a_i \ell nx_i$	$y=a_0+\sum_1^4 a_i x_i$	$\ell ny=a_0+\sum_1^4 a_i \ell nx_i$
S_R/R,%		3,9	3,3	14,2	11,3
$\Delta R/R$,%		15,4	13,3	55,8	44,5
	a_0	86,3	3	230,7	34,9
	a_1	22,8	24,6	105	102
	a_2	84,9	284*	684,7*	2668*
	a_3	102,5	83,2	198,6	160
	a_4	39,8	26,04	188,5	127
$S/\bar{y}$,%		54,6	12	47,6	10,2

* - несущественный фактор