

## О ПРИМЕНИМОСТИ «ПРИНЦИПА МАКСИМАЛЬНОГО РАСХОДА» ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕЧЕНИЙ В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКЕ

Ошмарин А.А., Шерыхалина Н.М.

*Уфимский государственный авиационный технический университет*

Во многих технических устройствах применяются центробежные форсунки для разбрызгивания горючего. Часто не удается провести строгий гидродинамический расчет течения жидкости в реальных аппаратах, поэтому инженеры пользуются различными приближенными эмпирическими закономерностями. Центробежные форсунки рассчитывались на основе подобного «принципа максимального расхода» (ПМР), входящего в открытие Г.Н. Абрамовича, Л.А. Клячко, И.И. Новикова и В.И. Скобелькина «Закономерность расхода жидкости в закрученном потоке». В ПМР утверждается, что при каждом заданном параметре  $A$  – параметр закрутки – реализуется течение с максимальным расходом.

В работе [1, 2] Б.А. Луговцов построил примеры решений, в которых этот принцип неверен, и выступил с его критикой. В.И. Налимов в своей работе [3] привел пример, который так же ставит под сомнение всеобщую применимость ПМР в центробежных форсунках, водосливах и других аналогичных течениях.

Однако, Г.Ю. Степанов [4] выступил в защиту ПМР и подверг жесткой критике Луговцова.

Таким образом, на сегодня существует 2 подхода к ПМР.

Рассмотрим оба принципа расчета относительно задачи течения идеальной невязкой несжимаемой жидкости вдоль полубесконечного щита с изломом и образованием вихря вблизи излома (рис. 1). С одной стороны поток ограничен свободной поверхностью. Рассматриваются течения типа уединенной волны.

Вектор скорости  $V$  потока по модулю на свободной поверхности связан с ординатой  $y$  уравнением Бернулли  $\frac{\rho V^2}{2} + \rho g y + P = const$ . На щите  $\text{Im}z=0$ , где  $z=x+iy$  – комплексная координата точки. Поток жидкости, в соответствии с допущениями, потенциален, но содержит точечный вихрь. Решение может быть найдено в виде аналитических функций комплексного переменного  $z(\zeta)$ ,  $w(\zeta)$ , где  $\zeta$  – параметрическая переменная [5]. Область изменения переменной  $\zeta$  – полукруг. Функция  $w$  – комплексный потенциал. Границы потока – непроницаемы, тогда

областью потока на плоскости комплексного потенциала является полоса с присоединенной полуполосой (рис. 2). Эта полуполоса есть образ ограниченной области потока вокруг вихря.

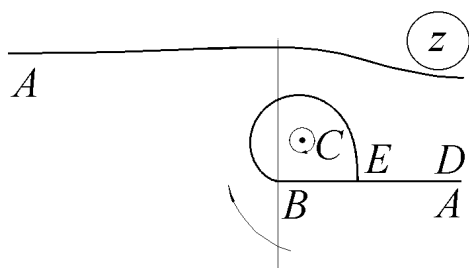


Рисунок 1. Форма области течения на физической плоскости

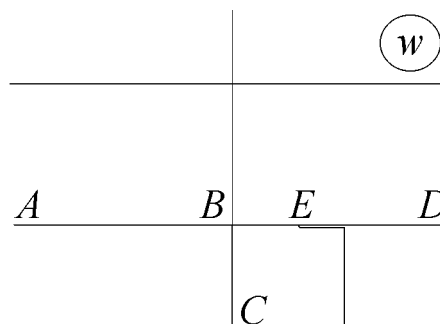


Рисунок 2. Форма области течения на плоскости комплексного потенциала

Задача о течении несжимаемой жидкости решается методом коллокаций. Уравнение Бернулли выполняется в дискретных точках. При решении с помощью видоизмененного метода Леви-Чивиты функцию  $z(\zeta)$  будем искать в виде суммы степенного ряда и некоторых функций, учитывающих заданные особенности в точках

$$z(\zeta) = h(z_0(\zeta) + z_1(\zeta) + z_2(\zeta)),$$

где  $z_0(\zeta)$  – функция, отображающая полукруг на фигуру приближенно представляющую область течения с боковым разрезом (решение аналогичной задачи для невесомой жидкости). Функция  $z_1(\zeta) = z(\zeta)/h - z_0(\zeta) - z_2(\zeta)$  имеет чисто действительные значения на действительном диаметре, аналитична внутри полукруга и непрерывна на границе. В связи с этим ее можно аналитически продолжить на весь круг и искать в виде сходящегося степенного ряда с действительными коэффициентами

$$z_1(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \zeta^m. \quad (1)$$

Эта функция необходима для выполнения условия Бернулли. Функция  $z_2(\zeta)$  введена для учета особенности решения  $z(\zeta)$  при  $\zeta=1$ .

Численно задача решается методом коллокаций. Для этого применяются алгоритмы, аналогичные описанным в [6]. В бесконечной сумме (1) сохраняется

конечное число  $N$  слагаемых, а уравнение Бернулли выполняется в дискретных точках  $\sigma_m = \pi m / 2N$ ,  $m = \overline{0, N}$ .

Тем самым получается система  $N$  нелинейных уравнений, которая решается численно методом Ньютона с регулированием шага относительно параметров  $C_m$ ,  $m = \overline{0, N-4}$ ,  $A_4$ ,  $p$ ,  $Fr$ . Оценка погрешности производится путем сравнения значений параметров (например, числа  $Fr$ , координаты точки  $B$  и др.), полученных при последовательном возрастании  $N$ , а также по максимальной невязке уравнения Бернулли, рассчитанной в промежуточных точках между узлами коллокаций. При этом  $y = \text{Im}z$ ,  $V = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{dw}{d\zeta} \right| \cdot \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^{-1}$ .

Возможность изменения числа точек коллокаций  $N$  в широком диапазоне (до 6-7 удвоений начальных значений  $N$ ) позволяет считать полученные оценки достаточно надежными.

Численные данные, полученные при расчетах показывают, что число  $Fr$  при увеличении числа точек коллокаций  $N$  приближается к 2, а  $y_A$  к 3. Эти значения могут быть получены из физических соображений. В силу допущений течение везде кроме точки  $C$  является безвихревым. Тогда уравнение Бернулли

$$\left( \frac{v}{v_0} \right)^2 + \frac{2y}{Fr^2 h} = const, \quad Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gh}}, \quad (2)$$

справедливо как при движении вдоль линий тока, так и поперек. Тогда вдоль вертикальных линий, проведенных на большом расстоянии слева от конца стенки  $B$  и справа под стенкой, имеют место равенства

$$0 + \rho g y + P_A(y) = 0 + \rho g y_A + P_0, \quad P_A(y) = \rho g (y_A - y) + P_0. \quad (3)$$

В то же время справа над стенкой уравнение (2.3.10) приводит к соотношениям

$$\left( \frac{v}{v_0} \right)^2 + \frac{2y}{Fr^2 h} = const, \quad P_D(y) = \rho g (h - y) + P_0. \quad (4)$$

Тогда уравнение изменения горизонтальной составляющей импульса струи

$$\left( \frac{v}{v_0} \right)^2 + \frac{2y}{Fr^2 h} = const. \quad (5)$$

где  $Q$  – расход, примет вид

$$\int_{-\infty}^0 [P_A(y) - P_A(y)] dy + \int_0^h [P_A(y) - P_D(y)] dy + \int_h^{y_A} [P_A(y) - P_0] dy = \frac{\rho g}{2} (y_A^2 - h^2) = \rho V_0^2 h$$

или

$$\left(\frac{y_A}{h}\right)^2 - 1 = 2Fr^2.$$

Получим равенство

$$2Fr^2 = \left(\left(\frac{y_A}{h}\right)^2 - 1\right) = \left(\left(1 + \frac{Fr^2}{4}\right)^2 - 1\right) = \left(Fr^2 + \frac{Fr^4}{4}\right). \quad (6)$$

Тогда

$$Fr = 2, \quad \frac{y_A}{h} = 3. \quad (7)$$

Таким образом, некоторые результаты расчетов подтверждаются аналитически. Для оценки погрешности других численных данных применяется правило Рунге [7,8].

Рассмотрим принцип максимального расхода (ПМР) [1] и его выполнимость применительно к решаемой задаче. В этом случае на поток со стороны стенки действует горизонтальная подсосывающая сила.

Зафиксируем  $y_A$  и  $g$ . Введем величину безразмерного расхода

$$\bar{Q} = \frac{V_0 h}{y_A \sqrt{g y_A}} = Fr \left(\frac{y_A}{h}\right)^{-3/2}.$$

Для  $Fr = 2$  и  $\frac{y_A}{h} = 3$  имеем

$$\bar{Q} = 2 \cdot 3^{-3/2} = \frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (8)$$

Учитывая, что  $\frac{y_A}{h} = 1 + \frac{Fr^2}{2}$ , получим

$$\bar{Q} = Fr \left(1 + \frac{Fr^2}{2}\right)^{-3/2}. \quad (9)$$

Дифференцируя (9), найдем

$$\bar{Q}' = \left(1 + \frac{Fr^2}{2}\right)^{-3/2} - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{Fr^2}{2}\right)^{-5/2} Fr^2 = 0,$$

откуда

$$Fr = 1, \quad \frac{y_A}{h} = \frac{3}{2}, \quad \bar{Q} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3/2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \quad (10)$$

т.е. расход в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем в случае (8).

Для исследования возможности реализации этих соотношений в задаче с вихрем были проведены расчеты, в которых положение образа вихря изменялось во всей области определения (в верхнем полукруге  $\zeta$ ). В таблице 1 приведены численные значения отношения расхода  $\bar{Q}$  к максимальному (10). Значения в строках соответствуют значениям  $|p| = i/10$ , в столбцах  $\arg(p) = \pi i/10$ . Видно, что для  $\operatorname{Re} p \geq 0$  значения расхода не доходят до максимального. При этом минимальное значение  $y_A/h \approx 1.717$ , что имеет место при  $\Gamma = 0$ , т.е. при отсутствии вихря (таб. 2). Увеличение  $\bar{Q}$  наблюдается при  $|p| \rightarrow 1$  и  $\arg(p)$  близких к  $\pi$ . Однако при  $\operatorname{Re} p < 0$  вихрь перемещается на нижнюю поверхность щита, а при  $|p| \rightarrow 1$  интенсивность вихря и размеры замкнутой вихревой области стремятся к бесконечности.



Рисунок 3. Фрагмент формы свободной поверхности и линии тока, разграничивающей основной поток и замкнутую вихревую зону

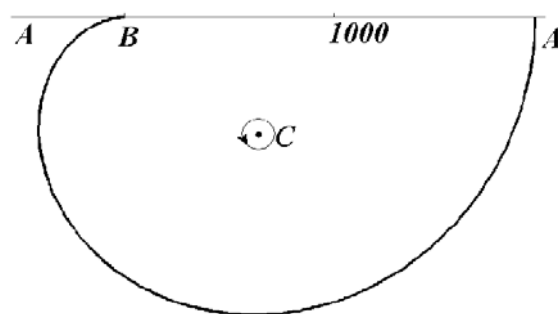


Рисунок 4. Форма свободной поверхности и линии тока, разграничивающей основной поток и замкнутую вихревую зону

Таблица 1

Результаты расчетов  $\bar{Q}/\bar{Q}_{\max}$  с разным положением вихря

$\lambda k$	1	3	5	7	9
1	0.977003	0.977327	0.977640	0.977787	0.977831
2	0.959044	0.968096	0.975963	0.978164	0.978391
3	0.866754	0.905902	0.957509	0.978519	0.979469
4	0.704116	0.769271	0.875328	0.973519	0.981214
5	0.521102	0.599991	0.719147	0.914551	0.983931
6	0.351597	0.436589	0.534107	0.719083	0.988198
7	-	0.298008	0.362871	0.453289	0.990420

Таблица 2

Результаты расчетов при отсутствии вихря

$N$	$Fr$	$\bar{Q}$	$h$
5	1.1946696162	0.5325702370	1.7136177460
10	1.1961658224	0.5324034659	1.7154063373
20	1.1976465316	0.5322374835	1.7171786073
30	1.1979075192	0.5322081312	1.7174912123
40	1.1979915464	0.5321986749	1.7175918726
50	1.1980267048	0.5321947173	1.7176339927
60	1.1980437980	0.5321927930	1.7176544709
70	1.1980529497	0.5321917627	1.7176654351
80	1.1980581822	0.5321911736	1.7176717040

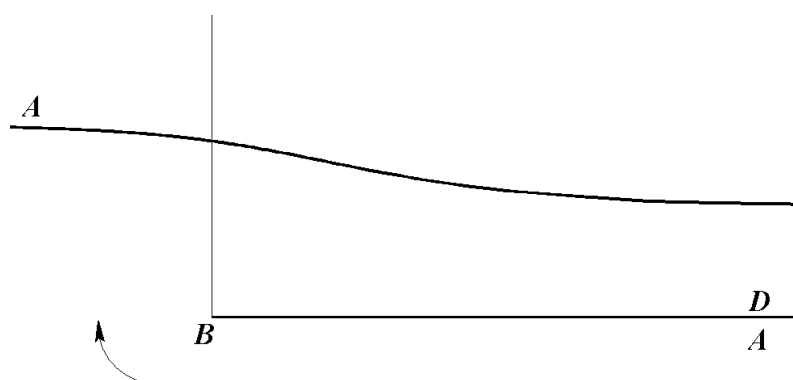


Рисунок 5. Форма свободной поверхности при отсутствии вихря

### Выводы

Численные результаты показали, что при моделировании течений в центробежной форсунке задачей о течении несжимаемой жидкости с наличием вихря применение принципа максимального расхода приводит, с физической точки зрения, к парадоксальным результатам. Так, по данным расчетов максимальное значение расхода жидкости получается, когда вихрь находится ниже щита (рис. 3 и 4). Кроме того, размер вихревой зоны велик по сравнению с перепадом высот свободной поверхности. В связи с этим наиболее близким к реальности следует считать течение со свободным вихрем.

### Литература

1. Луговцов Б.А. О принципе максимального расхода // ПМТФ. – 1991. -№4.
2. Луговцов Б.А. О принципе максимального расхода // ПМТФ. – 1991. -№4.
3. Налимов В.И. Сверхкритическое течение из-под щита // ПМТФ.— 1989. - №2.
4. Степанов Г.Ю. О статье Луговцова Б.А. «Определение основных параметров течения в центробежной форсунке с помощью законов сохранения» // ПМТФ. – 1991. -№4.
5. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Шерыхалин О.И. Исследование закритических режимов в нелинейной задаче о движении вихря под свободной поверхностью несжимаемой жидкости // ПМТФ 2000, Т. 41, № 1. С. 70-76.
6. Житников В.П. Решение плоских и осесимметричных задач с помощью методов теории функций комплексного переменного. Уфа: УГАТУ. 1994. 106с.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы . - М. :Наука. - 1973. - 631с.
8. Волков Е.А. Численные методы . - М.: Наука. - 1982. - 254с.