

УДК 539.422

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ. ЧАСТЬ I

Хакимов А.Г.

*Институт механики Уфимского научного центра РАН, г. Уфа  
e-mail: hakimov@anrb.ru*

Шакирьянов М. М.

*Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа  
e-mail: shakmar9@mail.ru*

**Аннотация.** При транспортировке нефти и нефтепродуктов на большие расстояния по трубопроводам, надземные части которых проходят через горные, водные, коммуникационные и другие препятствия, изгибаются собственным весом и под действием переменного внутреннего давления могут совершать пространственные колебания. При определенных соотношениях между параметрами колебания трубопровода могут усиливаться или ослабевать. Поэтому задача изучения пространственных колебаний трубопровода является актуальной проблемой и имеет практический интерес.

Рассматриваются пространственные колебания трубы и заключенной в ней жидкости относительно горизонтальной оси, проходящей через опоры. В статическом состоянии труба изогнута собственным весом и находится под действием внутреннего давления. Коэффициент упругости опор и деформации трубы, связанные с ее выходом из плоскости изгиба, считаются малыми, поэтому изогнутая ось трубопровода является плоской кривой. При этом учитываются силы инерции Кориолиса, выталкивающая сила Архимеда и сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости. На основе разработанной модели получена система из двух нелинейных дифференциальных уравнений изгибных и вращательных колебаний трубы, для решения которой последовательно применены методы Бубнова-Галеркина и Рунге-Кутты. Исследованы свободные колебания трубопровода. Результаты вычислений для конкретных значений основных параметров представлены в виде графиков. Приведены обобщающие выводы по работе.

**Ключевые слова:** пространственные, параметрические, колебания, трубопровод, переменное внутреннее давление

Магистральные трубопроводы, надземные части которых проходят через горные, водные, коммуникационные и другие препятствия, изгибаются собственным весом и под действием переменного внутреннего давления могут совершать пространственные колебания. При определенных соотношениях между параметрами колебания трубопровода могут усиливаться или ослабевать. Поэтому задача изучения пространственных колебаний трубопровода является актуальной проблемой и имеет практический интерес.

Рассматриваются пространственные колебания трубы и заключенной в ней жидкости относительно горизонтальной оси, проходящей через опоры. В статиче-

ском состоянии труба изогнута собственным весом и находится под действием внутреннего давления. Предполагается, что она выводится из этого состояния путем отклонения на угол  $\theta$  от вертикальной плоскости. Коэффициент упругости опор и деформации трубы, связанные с ее выходом из плоскости изгиба, считаются малыми, поэтому изогнутая ось трубопровода является плоской кривой. При этом учитываются силы инерции Кориолиса, выталкивающая сила Архимеда и сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости. Колебания трубы происходят под действием переменного внутреннего давления.

Длина трубы равна  $L$ , толщина ее стенки –  $h$ , а суммарная масса однородной трубы и жидкости –  $m$ .

Слева на рис. 1 изображен элемент трубы длиной  $dx$  и массой  $dm = \frac{m}{L} dx$ , а справа на этом же рисунке показаны ускорения и силы, действующие на выделенный элемент трубы.

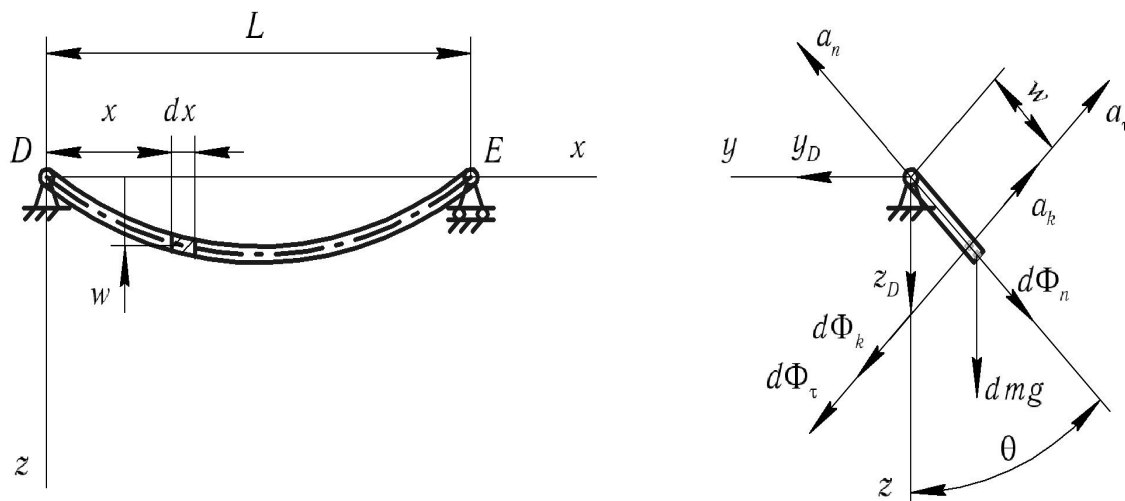


Рис. 1. Расчетная схема изгибно-вращательных колебаний трубопровода

Распределенная нагрузка  $q_n$  на трубопровод выражается формулой [1]:

$$q_n = -\frac{m}{L} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_i F_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad F_i = \pi R_i^2, \quad P_i = P_0 + P_a \sin(\Omega t + \varphi), \quad (1)$$

где  $w$  – прогиб элемента трубы;  $\Omega$  – круговая частота;  $\varphi$  – начальная фаза;  $P_0$  и  $P_a$  – величины статической и амплитуда динамической составляющих переменного внутреннего давления  $P_i$  в трубе;  $R_i$ ,  $F_i$  – внутренний радиус и площадь проходного сечения трубопровода;  $t$  – время.

Величина выталкивающей силы  $d\vec{A}$  Архимеда, действующей на элемент трубы длиной  $dx$ , равна

$$dA = \rho_{os} \pi (R_i + h)^2 g dx,$$

где  $\rho_{os}$  – плотность сплошной среды;  $g$  – гравитационное ускорение.

Сила  $d\vec{F}_c$  сопротивления движению элемента трубы определяется формулой Стокса [2]:

$$d\vec{F}_c = -\mu \vec{V}_a dx,$$

где  $\vec{V}_a$  – абсолютная скорость элемента;  $\mu$  – коэффициент сопротивления, зависящий от вязкости сплошной среды и формы обтекаемого тела.

Согласно теореме о сложении скоростей

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e,$$

где  $\vec{V}_r$  и  $\vec{V}_e$  – относительная и переносная скорости элемента трубы. При этом последние даются формулами

$$V_r = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad V_e = \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

Таким образом, силу  $d\vec{F}_c$  сопротивления можно представить векторной суммой

$$d\vec{F}_c = d\vec{F}_{c1} + d\vec{F}_{c2}.$$

Здесь  $d\vec{F}_{c1}$  и  $d\vec{F}_{c2}$  – изгибная и вращательная составляющие силы сопротивления.

Очевидно, что

$$dF_{c1} = \mu \frac{\partial w}{\partial t} dx, \quad dF_{c2} = \mu w \frac{\partial \theta}{\partial t} dx. \quad (2)$$

Касательное  $a_\tau$ , нормальное  $a_n$  и кориолисово  $a_k$  ускорения элемента равны

$$a_\tau = w \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad a_n = w \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_k = 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dw}{dt}.$$

Касательная  $d\Phi_\tau$ , нормальная  $d\Phi_n$  и кориолисова  $d\Phi_k$  силы инерции элемента трубы запишутся как

$$d\Phi_\tau = dm \cdot w \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad d\Phi_n = dm \cdot w \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad d\Phi_k = 2 dm \cdot \frac{d\theta}{dt} \frac{dw}{dt}, \quad (3)$$

где  $\theta$  – угол поворота трубы как твердого тела относительно оси  $Dx$ .

Суммарный момент  $M_y$  сил упругости в опорах прямо пропорционален углу  $\theta$  поворота трубы как твердого тела относительно оси  $Dx$ :

$$M_y = c \cdot \theta, \quad (4)$$

где  $c$  – коэффициент упругости опор.

Уравнение условного равновесия трубы в виде суммы моментов всех приложенных сил и сил инерции относительно оси  $Dx$  имеет вид

$$-\int_{(m)} (dmg - dA) w \sin \theta - \int_{(m)} w d\Phi_\tau - \int_{(m)} w d\Phi_k - M_y - \mu \frac{d\theta}{dt} \int_0^L w^2 dx = 0. \quad (5)$$

Сила  $T$  продольного натяжения трубопровода определяется по формуле

$$T = \frac{EF}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (6)$$

где  $E$  и  $F=2\pi R_i h$  – модуль Юнга материала и площадь поперечного сечения трубы.

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы в своей плоскости следующее

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{EJL}{m} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{(T - P_i F_i)L}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g_1 \cos \theta + w \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{\mu L}{m} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (7)$$

где  $J \simeq \pi R_i^3 h$  – осевой момент инерции площади поперечного сечения трубопровода;  $g_1 = g - \frac{A}{m}$ ,  $A = \rho_{os} \pi (R_i + h) L g$  – выталкивающая всю трубу сила Архимеда.

Функцию прогиба трубопровода, удовлетворяющую граничным условиям

$$w(0, t) = w(L, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0, \text{ примем в виде}$$

$$w(x, t) = (W_0 + w_0(t)) \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (8)$$

где  $W_0$  и  $w_0(t)$  – амплитуды статической и динамической составляющих прогиба.

Подставляя функции (2) - (4) и (8) в уравнения (5) и (7) и применяя к последнему процедуру Бубнова - Галеркина [3], после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} (W_0 + w_0(t))^2 + \frac{\mu}{m} \frac{d\theta}{dt} (W_0 + w_0(t)) \left( \frac{2g_1}{\pi} \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} \frac{dw_0}{dt} \right) = 0, \\ \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \frac{\mu L}{m} \frac{dw_0}{dt} + \frac{\pi^4 EJ}{mL^3} (W_0 + w_0(t)) = \frac{4g_1}{\pi} \cos \theta + (W_0 + w_0(t)) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \\ - \left\{ \frac{\pi^2 EF}{4L^2} (W_0 + w_0(t))^2 - F_i (P_0 + P_a \sin(\Omega t + \varphi)) \right\} \frac{\pi^2}{mL} (W_0 + w_0(t)). \quad (9) \end{aligned}$$

Полагая во втором уравнении (9)  $\theta(t) \equiv 0, w_0(t) \equiv 0, P_a = 0$ , получим следующее алгебраическое уравнение для определения статической составляющей  $W_0$  прогиба трубопровода

$$\frac{\pi^4 EF}{4L^2} W_0^3 + \pi^2 \left( \frac{\pi^2 EJ}{L^2} - F_i P_0 \right) W_0 - \frac{4g_1 mL}{\pi} = 0. \quad (10)$$

Отметим также, что из этого уравнения определяется приближенное критическое значение статического давления  $P_0$

$$P_0 = \frac{\pi^2 EJ}{F_i L^2}.$$

Система уравнений (9) решается при следующих начальных условиях

$$t=0, \theta=\theta_0, \frac{d\theta}{dt}=\omega_0, w_0=0, \frac{dw_0}{dt}=0. \quad (11)$$

Здесь  $\theta_0, \omega_0$  – начальные угол поворота и угловая скорость трубы.

Рассмотрим свободные колебания трубопровода. С этой целью во втором из дифференциальных уравнений (9) полагаем

$$P_a = 0, \Omega = 0, \varphi = 0. \quad (12)$$

Для определения приближенных значений частот свободных вращательных  $\omega_1$  и изгибных  $\omega_2$  колебаний трубопровода линеаризуем дифференциальные уравнения (9) с учетом равенств (10) и (12). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2\mu}{mW_0^2} \frac{d\theta}{dt} + \frac{2}{W_0^2} \left\{ \frac{c}{m} + \frac{2g_1}{\pi} W_0 \right\} &= 0, \\ \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \frac{\mu L}{m} \frac{dw_0}{dt} + \frac{\pi^2}{mL} \left\{ \frac{\pi^2 EJ}{L^2} - F_i P_0 + \frac{3\pi^2 EF}{4L^2} W_0^2 \right\} w_0(t) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  собственных колебаний трубопровода будут определяться формулами

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{4}{W_0^4} \left\{ \frac{c}{m} + \frac{2g_1}{\pi} W_0 \right\}^2 - \frac{\mu^2}{m^2 W_0^4}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{\pi^4}{m^2 L^2} \left\{ \frac{\pi^2 EJ}{L^2} - F_i P_0 + \frac{3\pi^2 EF}{4L^2} W_0^2 \right\}^2 - \frac{\mu^2 L^2}{4m^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Исследуем влияние выталкивающей силы Архимеда, сил инерции Кориолиса, силы сопротивления и величины статической составляющей внутреннего давления в жидкости а также геометрических и физико-механических параметров трубы на ее свободные колебательные движения.

Численное решение задачи Коши (9), (11) определялось методом Рунге–Кутты. Результаты вычислений для следующих значений основных параметров:  $m = 6,141 \cdot 10^3$  кг,  $L = 25$  м,  $c = 0$ ,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>,  $R_i = 0,259$  м,  $h = 0,006$  м,  $\theta_0 = 0,3$  рад,  $E = 2,0 \cdot 10^{11}$  Па,  $\omega_0 = 0$  рад/с представлены в виде графиков. На рис. 2 - 11 приведены графики зависимости угла  $\theta$  поворота и динамического прогиба  $w_0(t)$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  соответственно. Сплошными линиями на графиках нанесены результаты вычислений с учетом сил сопротивления, а штриховыми – без учета этих сил. Расчеты проводились для двух вариантов значений коэффициента  $\mu$  сопротивления и плотности  $\rho_{os}$  сплошной среды:  $\mu = 24$  Пас,  $\rho_{os} = 800$  кг/м<sup>3</sup> и  $\mu = 0,021$  Пас,  $\rho_{os} = 1,25$  кг/м<sup>3</sup>. Графики на рис. 2 - 6 и 7 - 9 соответственно иллюстрируют результаты расчетов для двух отмеченных выше вариантов значений коэффициента сопротивления и плотности сплошной среды.

Влияние величины  $P_0$  статической составляющей внутреннего давления в трубе на ее колебательные движения представлено графиками на рис. 2 - 4 и 7 - 9. При одних и тех же значениях основных параметров вычисления были проведены для трех величин статической составляющей давления:  $P_0 = 10$  бар (рис. 2 и 7);

$P_0 = 30$  бар (рис. 3 и 8);  $P_0 = 50,8$  бар (рис. 4 и 9). Видно, что с увеличением статической составляющей внутреннего давления одновременно происходит увеличение амплитуды изгибных колебаний и уменьшение частоты вращательных колебаний трубы. Можно также видеть, что при относительно больших значениях сил сопротивления, когда  $\mu = 24$  Пас,  $\rho_{os} = 800$  кг/м<sup>3</sup>, свободные изгибные и вращательные колебания трубы с течением времени затухают (рис. 2 - 6), а при малых значениях сил сопротивления, когда  $\mu = 0,021$  Пас,  $\rho_{os} = 1,25$  кг/м<sup>3</sup>, эти колебания могут продолжаться достаточно долго (рис. 7 - 11). Кроме того, следует отметить, что в последнем случае имеет место также совпадение результатов вычислений с учетом и без учета сил сопротивления.

Такие же графики построены на рис. 5, 6 ( $\mu = 24$  Пас,  $\rho_{os} = 800$  кг/м<sup>3</sup>) и рис. 10, 11 ( $\mu = 0,021$  Пас,  $\rho_{os} = 1,25$  кг/м<sup>3</sup>) для статического давления  $P_0 = 50,8$  бар без учета выталкивающей силы Архимеда (рис. 5 и 10) и сил инерции Кориолиса (рис. 6 и 11). Из сравнения этих графиков соответственно с графиками на рис. 4 и 9 можно сделать вывод о том, что в отсутствие силы Архимеда или сил инерции Кориолиса происходит увеличение частот свободных вращательных и изгибных колебаний трубопровода. При этом также наблюдается значительный рост амплитуды изгибных колебаний.

С учетом вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1. На основе разработанной приближенной математической модели изгибно - вращательных колебательных движений трубопровода исследованы его свободные колебания. Результаты вычислений для конкретных значений основных параметров представлены в виде графиков.

2. Установлено, что с увеличением статической составляющей внутреннего давления одновременно происходит увеличение амплитуды свободных изгибных колебаний и уменьшение частоты свободных вращательных колебаний трубы.

3. Показано, что при относительно больших значениях сил сопротивления свободные изгибные и вращательные колебания трубы с течением времени затухают, а при малых значениях сил сопротивления эти колебания могут продолжаться достаточно долго.

4. При принятых значениях параметров в отсутствие силы Архимеда или сил инерции Кориолиса происходит увеличение частот свободных вращательных и изгибных колебаний трубопровода. В этих случаях также наблюдается значительный рост амплитуды изгибных колебаний.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№11-01-97016-р\_Пооволжье\_а).*

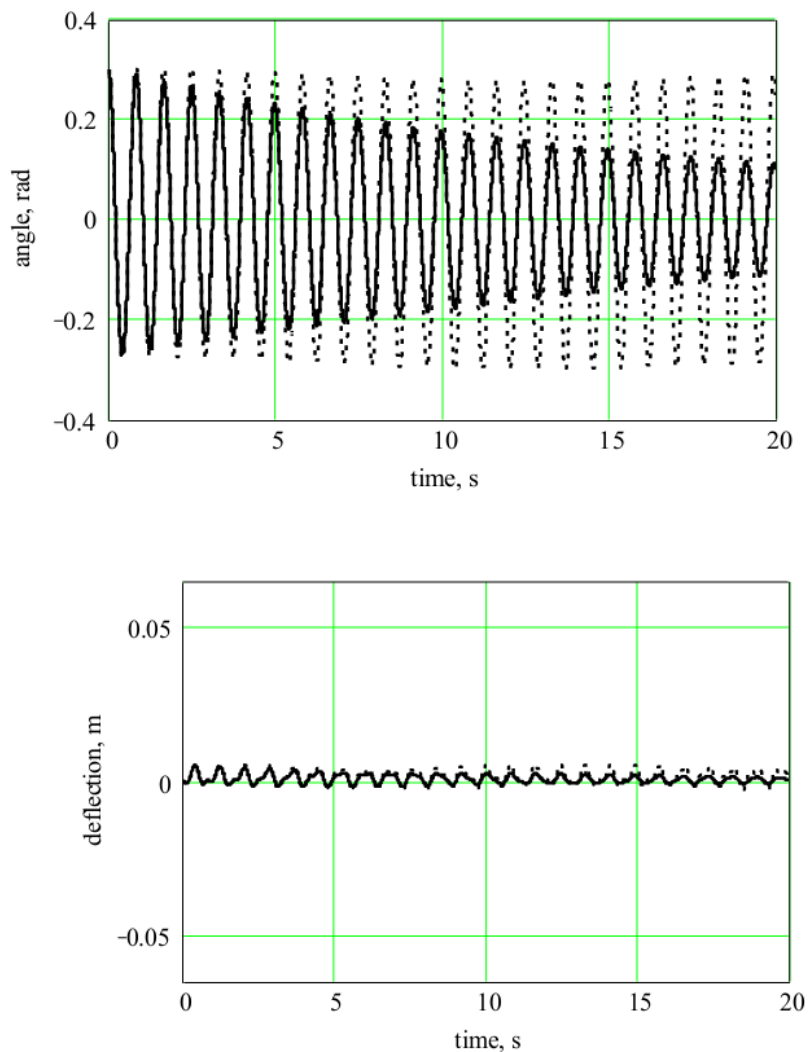


Рис. 2. Зависимости угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w_0$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  при  $P_0 = 10$  бар,  $\mu = 24$  Пас,  $\rho_{os} = 800$  кг/м<sup>3</sup>

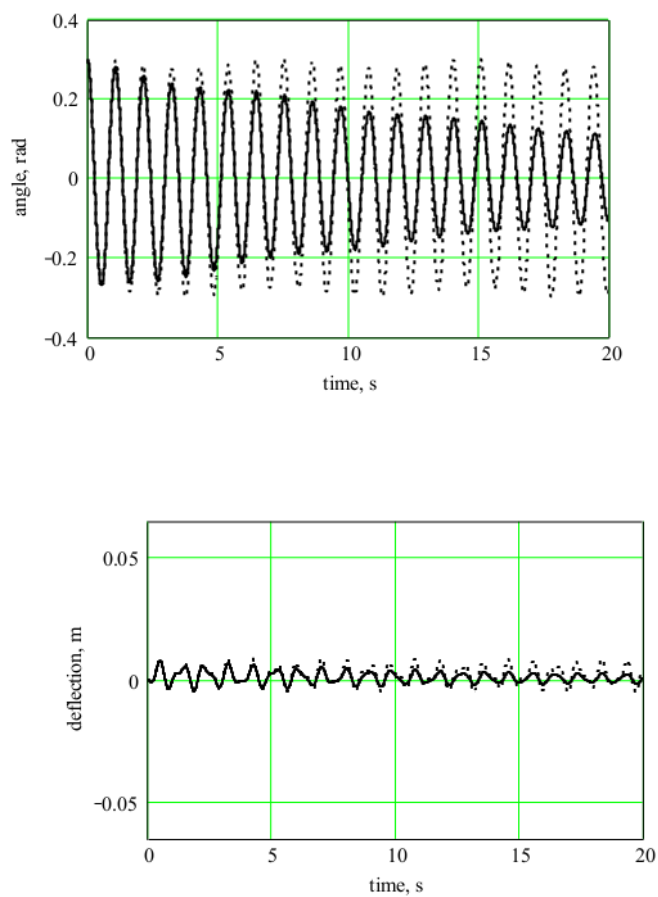


Рис. 3. Зависимости угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w_0$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  при  $P_0 = 30$  бар,  $\mu = 24$  Пас,  $\rho_{os} = 800$  кг/м<sup>3</sup>



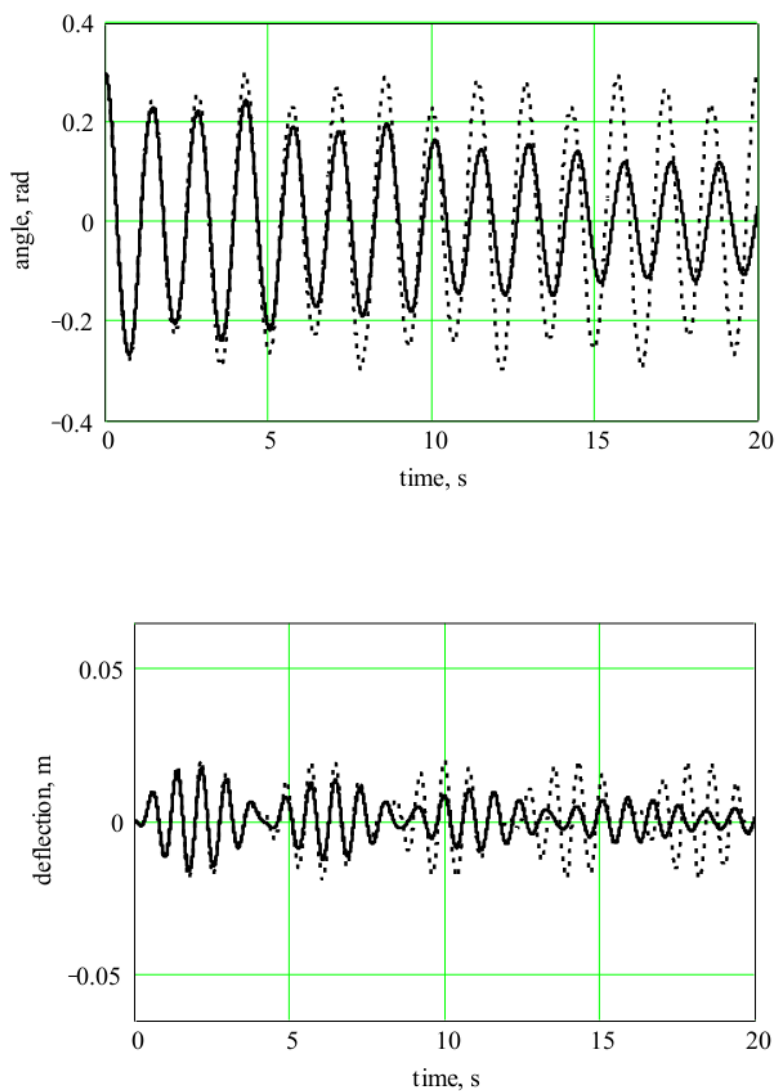


Рис. 4. Зависимости угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w_0$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  при  $P_0 = 50,8$  бар,  $\mu = 24$  Пас,  $\rho_{os} = 800$  кг/м<sup>3</sup>

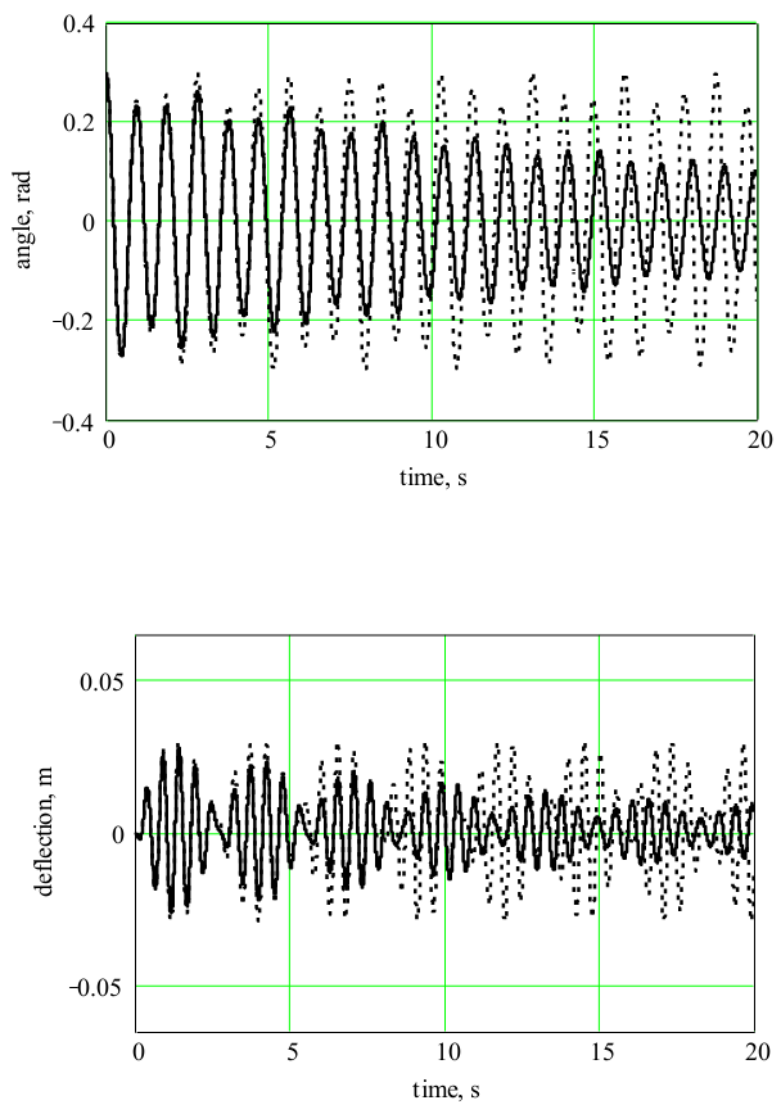


Рис. 5. Зависимости угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w_0$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  при  $P_0=50,8$  бар,  $\mu=24$  Пас,  $\rho_{os}=800$  кг/м<sup>3</sup>. Выталкивающая сила Архимеда не учитывается

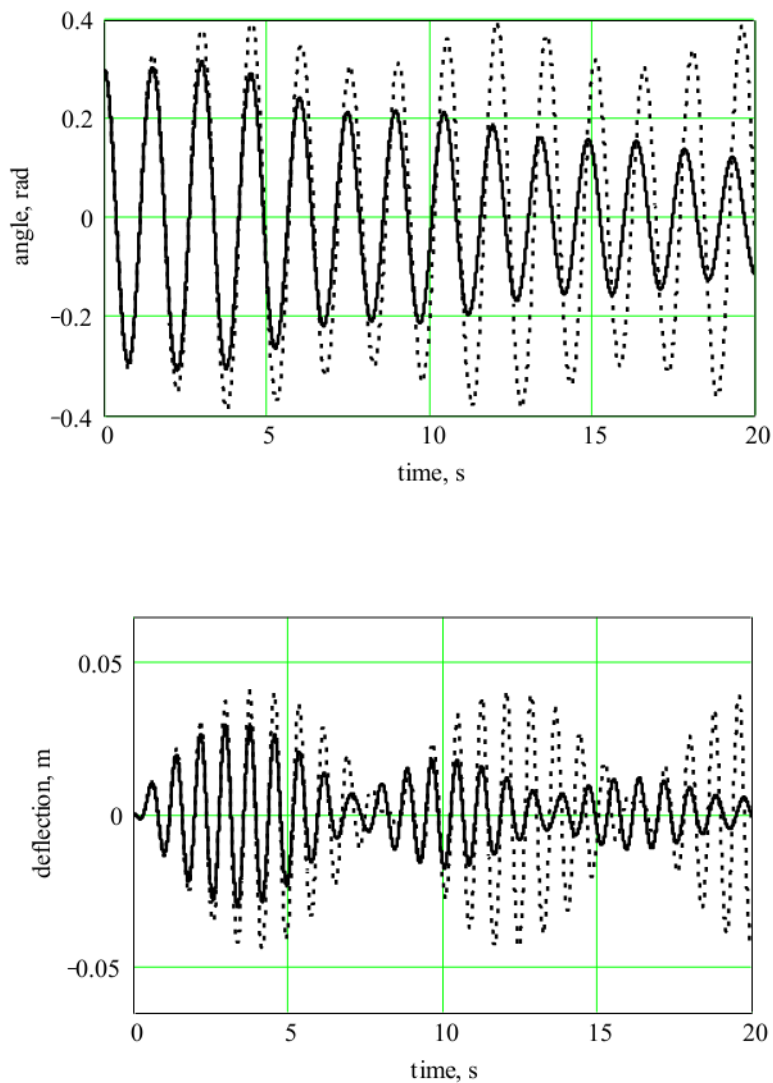


Рис. 6. Зависимости угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w_0$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  при  $P_0=50,8$  бар,  $\mu=24$  Пас,  $\rho_{os}=800$  кг/м<sup>3</sup>. Силы инерции Кориолиса не учитываются

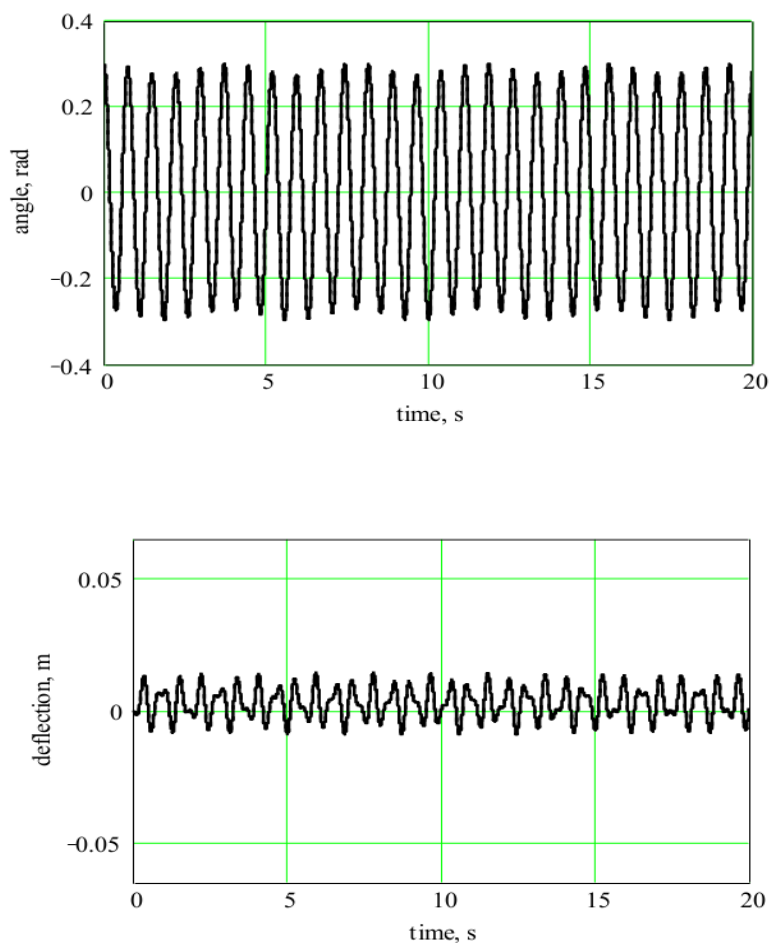


Рис. 7. Зависимости угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w_0$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  при  $P_0=10$  бар,  $\mu=0,021$  Пас,  $\rho_{os}=1,25$  кг/м<sup>3</sup>

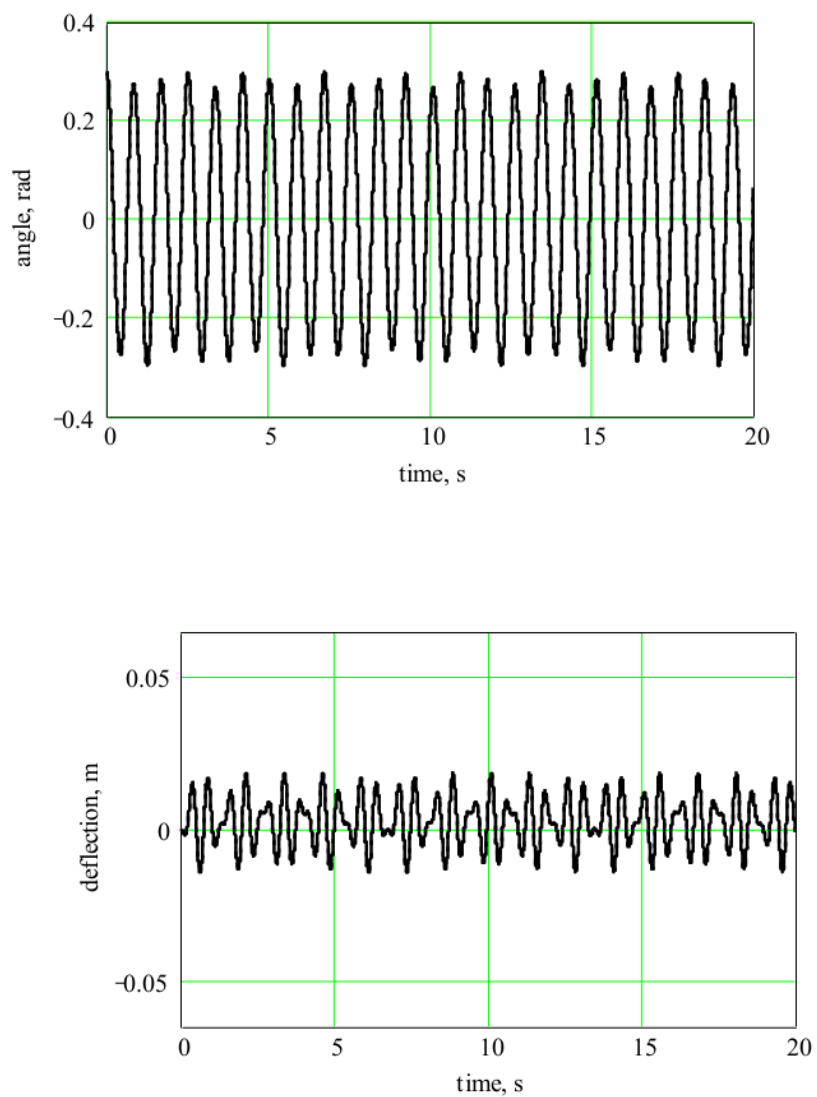


Рис. 8. Зависимости угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w_0$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  при  $P_0=30$  бар,  $\mu=0,021$  Пас,  $\rho_{os}=1,25$  кг/м<sup>3</sup>

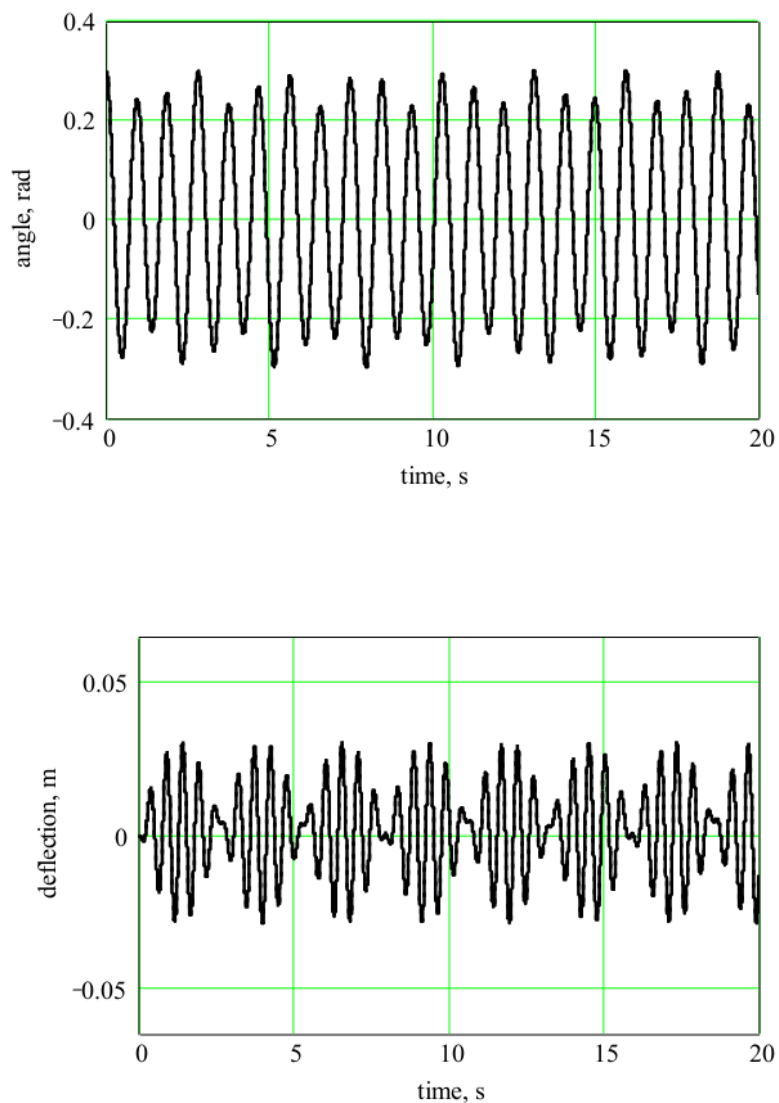


Рис. 9. Зависимости угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w_0$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  при  $P_0=50,8$  бар,  $\mu=0,021$  Пас,  $\rho_{os}=1,25$  кг/м<sup>3</sup>

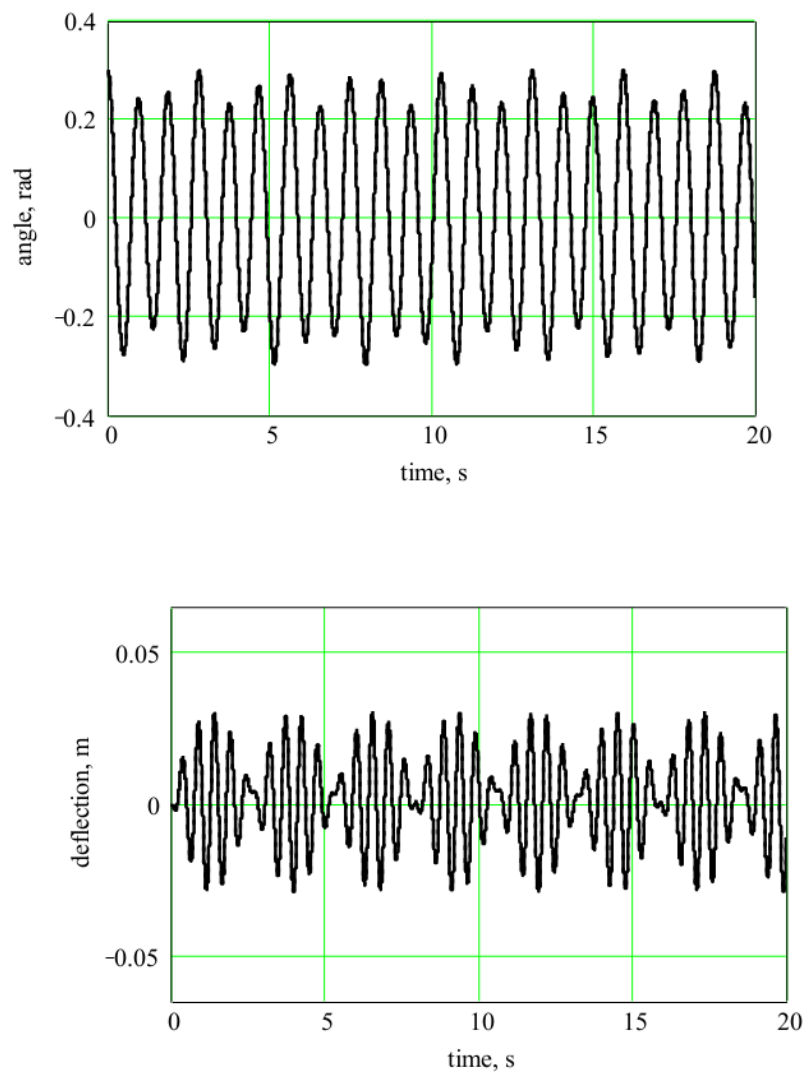


Рис. 10. Зависимости угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w_0$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  при  $P_0=50,8$  бар,  $\mu=0,021$  Пас,  $\rho_{os}=1,25$  кг/м<sup>3</sup>. Выталкивающая сила Архимеда не учитывается

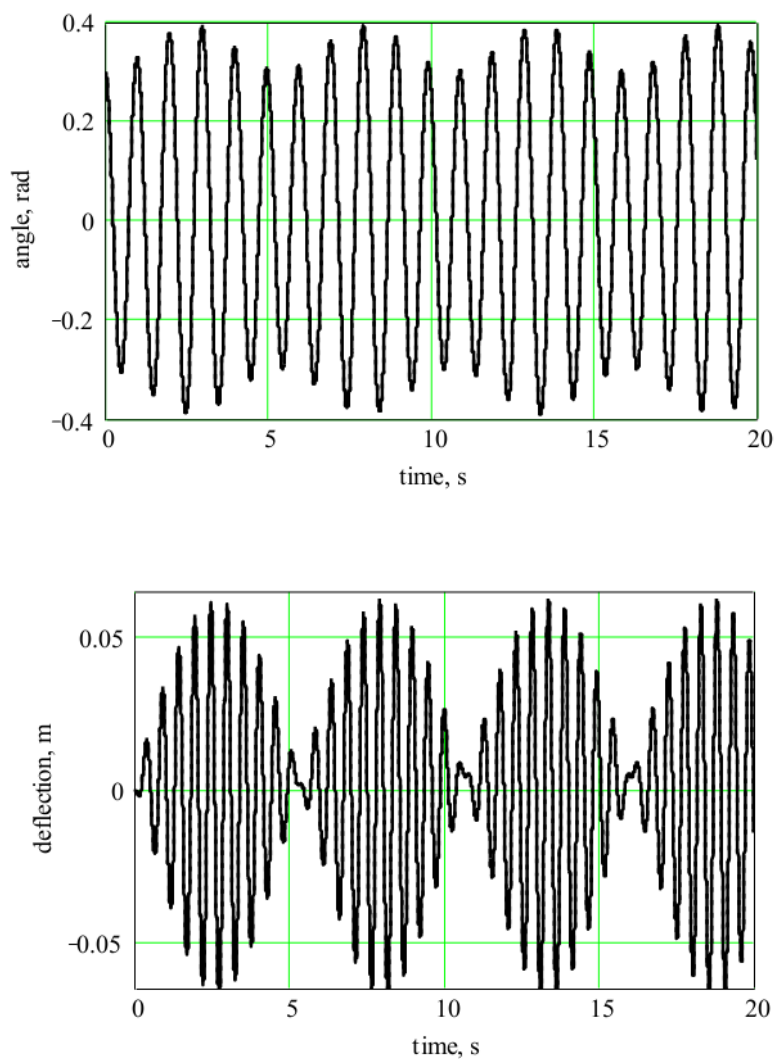


Рис. 11. Зависимости угла поворота  $\theta$  и прогиба  $w_0$  средней точки пролета трубы от времени  $t$  при  $P_0=50,8$  бар,  $\mu=0,021$  Пас,  $\rho_{os}=1,25$  кг/м<sup>3</sup>.  
Силы инерции Кориолиса не учитываются



### Литература

1. Ильгамов М.А. Статические задачи гидроупругости. Казань: ИММ РАН, 1994. 208 с.
2. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.: Гостехиздат, 1951. 420 с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 954 с.

## SPATIAL PARAMETRICAL VIBRATIONS OF A PIPELINE AFFECTED BY VARIABLE INTERNAL PRESSURE. PART I

A.G. Khakimov

*Institute of mechanics of the Ufa Center of the Russian Academy of Sciences  
Ufa, Russia, e-mail: hakimov@anrb.ru*

M.M. Shakiryaynov

*Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia  
e-mail: shakmar9@mail.ru.*

**Abstract.** *During transportation of crude oil and refined products for long distances the above-ground segments of a pipeline, in their passage through such obstacles as mountains, water bodies, communications, etc., get bent by gravity and can execute spatial vibrations under the effect of alternating internal pressure. Pipeline vibrations can be stronger or weaker depending on certain relationships among parameters. Thus, an investigation into pipeline spatial vibrations is of much topicality and practical importance.*

*Consideration is given to spatial vibrations of a pipeline with liquid contained in it about the horizontal axis that passes through bearings. In a steady state the pipeline is bent by gravity and is affected by internal pressure. The elasticity coefficients of the bearings and deformations of the pipeline associated with its exit out of the bending plane are reckoned as small; therefore the pipeline bent axis represents a planar curve. In this case, one should allow for inertial Coriolis forces, buoyancy force and drag force proportional to the first-order velocity. Based on the obtained model we have developed a set of two nonlinear differential equations for the pipeline flexural and rotational vibrations solved with the aid of the sequentially applied Bubnov-Galerkin and Runge-Kutta methods. Free vibrations of the pipeline have been examined. Computational results for actual values of the key parameters are given in the form of diagrams. General conclusions are presented in the work.*

**Keywords:** *spatial, parametrical, vibrations, pipeline, variable internal pressure*

### References

1. Il'gamov M.A. Sticheskie zadachi gidrouprugosti (Static problems of hydroelasticity). Kazan, IMM RAS, 1994. 208 p.
2. Targ S.M. Osnovnye zadachi teorii laminarnykh techenii (Basic problems in the theory of laminar flows). Moscow, Gostekhizdat, 1951. 420 p.
3. Vol'mir A.S. Ustoichivost' deformiruemykh sistem (Stability of deformable systems). Moscow, Nauka, 1967. 954 p.