

## ДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ШТАНГИ НА УПРУГОЙ ПОДВЕСКЕ

Хакимов А.Г.

*Институт механики Уфимского научного центра РАН  
hakimov@anrb.ru*

*По трем собственным частотам продольных колебаний определяются место и размеры поперечного надреза в вертикальной штанге на упругой подвеске, растянутой под действием собственного веса.*

*Ключевые слова: штанга, вертикальная штанговая колонна, собственные частоты продольных колебаний, параметр надреза, длина надреза, координата надреза*

В наклонно направленных скважинах основным элементом, ограничивающим надежность и работоспособность насосной установки, является штанговая колонна. Наибольшее число отказов штанговых колонн вызвано обрывами штанг. Предполагается, что обрыву штанги предшествует появление участка с меньшей площадью поперечного сечения. В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных частот изгибных колебаний [1] или изменение частоты собственных продольных колебаний [2]. В [3] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. В [4] и ряде других работ для стержня, совершающего продольные колебания, трещина моделируется как продольная пружина с жесткостью и для балки, совершающей изгибные колебания, повреждение моделируется вращательной пружинкой с жесткостью. Решению обратных задач о продольных бегущих волнах в стержнях конечной длины посвящена работа [5].

Рассматривается напряженно-деформированное состояние прямой штанги, закрепленной верхним концом на упругой подвеске жесткостью  $c_1$  и растянутой под действием собственного веса (рис. 1). Предполагается, что в штанге имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Этот надрез не приводит к изгибу штанги и моделирует ее повреждение, в частности, повреждение, типа раскрытой трещины. Рассматрива-

ется только напряженно-деформированное состояние в пределах упругости для тонкой штанги. Поскольку трещина появляется в результате развития незначительного зародыша, причем необязательно в наиболее напряженном сечении, то предполагается, что надрез может быть в любом месте по длине штанги. Задача состоит в определении координаты надреза и его размеров в приближении гипотезы плоских сечений.

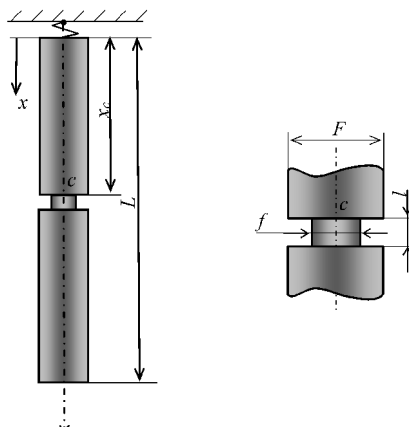


Рисунок 1

Обозначим через  $L, F$  длину и площадь поперечного сечения штанги,  $E, \rho, \mu$  – модуль упругости, плотность и коэффициент внутреннего трения, через  $l, f$  – длину и площадь поперечного сечения надреза,  $x_c$  – его координату,  $u, T$  – перемещение и сила натяжения штанги. Между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  принимается следующая зависимость

$$\sigma = E \left( \varepsilon + \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В соответствии со сказанным имеем

$$E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad T = EF \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right).$$

Отсчитывая координату  $x$  от точки крепления, запишем граничные условия

$$T = c_1 u(x=0), \quad T = 0(x=L).$$

В пределах надреза с короткой длиной  $l$  и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние [6]. Однако здесь для простоты принимаем одноосное растяжение – сжатие. Как показывают экспери-

ментальные результаты [7], средняя величина коэффициента затухания продольных колебаний подвешенной штанги с надрезом при ударе по нижнему торцу примерно на 20 % больше, чем этот коэффициент для такой же штанги без надреза. Рассматриваем динамическую задачу [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad T = EF \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right), \quad (1)$$

$$T = c_1 u(x=0), T = 0(x=L). \quad (2)$$

Обозначая функции в областях  $0 \leq x \leq x_c$ ,  $x_c \leq x \leq x_c + l$ ,  $x_c + l \leq x \leq L$  индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при  $x = x_c$  и  $x = x_c + l$  (условия равенства усилий и перемещений) [8]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} = m \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right), \quad u_1 = u_2, \quad (x = x_c), \quad (3)$$

$$m \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial t}, \quad u_2 = u_3, \quad (x = x_c + l), \quad m = \frac{f}{F}. \quad (4)$$

Условия вида (3) - (4) приводятся также в статье [8], где предложена универсальная процедура обработки данных разрезного стержня Гопкинсона [9]. Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют его координата  $x_c$ , длина надреза  $l$  и параметр  $m$ . В прямой задаче координата надреза  $x_c$ , его длина  $l$  и параметр  $m$  известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины.

Частное решение задачи (1) при  $\mu = 0$  имеет вид

$$u = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) \sin \omega t \quad (\alpha = \omega/a, a^2 = E/\rho).$$

Шесть констант в этом решении, записанном для областей  $0 \leq x \leq x_c$ ,  $x_c \leq x \leq x_{cl}$ ,  $x_{cl} \leq x \leq L$  ( $x_{cl} \leq x_c + l$ ) определяются из шести граничных условий (2) - (4). Для того, чтобы  $A_i, B_i (i = 1...3)$  не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель равнялся нулю

$$\det(a_{ij}) = 0, \quad (5)$$

где ненулевые элементы определителя записываются в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_1, a_{12} = E, a_{25} =, a_{26} = \cos(), \\ a_{31} &= \sin(\alpha x_c), a_{32} = -\cos(\alpha x_c), a_{33} = -m \sin(\alpha x_c), a_{34} = m \cos(\alpha x_c), \\ a_{41} &= \cos(\alpha x_c), a_{42} = \sin(\alpha x_c), a_{43} = -\cos(\alpha x_c), a_{44} = -\sin(\alpha x_c), \\ a_{53} &= m \sin(\alpha x_{cl}), a_{54} = -m \cos(\alpha x_{cl}), a_{55} = -\sin(\alpha x_{cl}), a_{56} = \cos(\alpha x_{cl}), \\ a_{63} &= \cos(\alpha x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha x_{cl}), a_{65} = -\cos(\alpha x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha x_{cl}). \end{aligned}$$

Условие (5) дает частотное уравнение, которое здесь не приводится из-за его громоздкости.

Когда коэффициент  $c_1 \rightarrow \infty$ , тогда частотное уравнение упрощается. Применяя следующие соотношения при малых  $\alpha l$ :

$$\sin(\alpha x_{cl}) = \sin(\alpha x_c) + \alpha l \cos(\alpha x_c), \quad \cos(\alpha x_{cl}) = \cos(\alpha x_c) - \alpha l \sin(\alpha x_c),$$

и пренебрегая  $(\alpha l)^2$ , получим

$$m^2 \left( -\sin(\alpha L) + \sin(\alpha L) \cos^2(\alpha x_c) - \cos(\alpha L) \sin(\alpha L) \cos(\alpha x_c) \right) + \\ + m \left( \sin(\alpha L) + \frac{\cos(\alpha L)}{\alpha l} \right) + \sin(\alpha x_c) \cos(\alpha x_c) \cos(\alpha L) - \sin(\alpha L) \cos^2(\alpha x_c) = 0 \quad (6)$$

Для штанги без надреза ( $\alpha l = 0$ ) из уравнения (6) следует, что  $\cos \alpha l = 0$ , а собственные частоты равны [2]  $\alpha l = (2k-1)\pi/2$  ( $k=1,2,\dots$ ) или  $\omega_k = (2k-1)\pi a/2L$ .

Для определения  $m, l$  и  $x_c$  необходимо провести анализ собственных частот продольных колебаний штанги с надрезом. Такое исследование выполнено для изгибных колебаний балки в работах [10, 11].

**Прямая задача.** Решение уравнения (6) проведено численно для следующих параметров системы:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $L = 500$  м,  $F = 0.00038$  м<sup>2</sup> (диаметр штанги 22 мм),  $c_1 \rightarrow \infty$ . Скорость звука  $a = 5063.6$  м/с. При этом первая, вторая и третья собственные частоты штанги без надреза  $\omega_1 = 15.908$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_2 = 47.724$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_3 = 79.540$  с<sup>-1</sup>. Для штанги с надрезом при  $x_c = 50$  м,  $m = 0.75$ ,  $l = 4$  м решение прямой задачи дает, что круговые частоты продольных колебаний штанги  $\omega_1 = 15.86760$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_2 = 47.64356$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_3 = 79.51424$  с<sup>-1</sup>. На рис. 2 приводятся зависимости круговых частот продольных колебаний штанги  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  от координаты надреза  $x_c$  для параметра  $m = 0.1$  и различных  $l$  (в м). Эти зависимости имеют периодический характер. Вторая частота не «чувствует» надрез, если координата надреза  $x_c = L/3$ , а третья частота не «чувствует» надрез, если координата надреза  $x_c = L/5$  и  $x_c = 3L/5$  и все частоты не «чувствуют» надрез, если координата надреза  $x_c \rightarrow L$ .

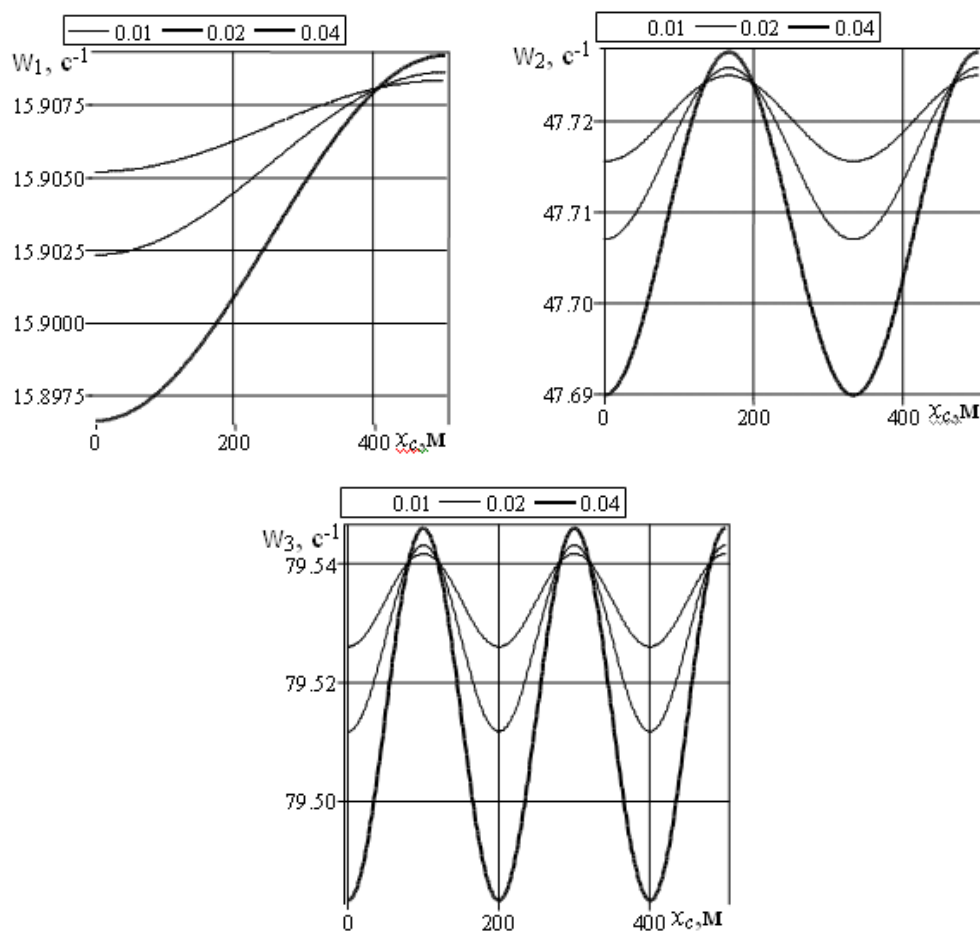


Рисунок 2. Зависимости круговых частот продольных колебаний штанги  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  от координаты надреза  $x_c$  для параметра  $m = 0.1$  и различных  $l$  (в м)

**Обратная задача.** На рис. 3а приводятся зависимости параметра  $m$  от круговых частот продольных колебаний штанги  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  для координаты надреза  $x_c = 200$  м и различных малых  $l$  (в м).

На рис. 3б приводятся зависимости параметра  $m$  от круговых частот продольных колебаний штанги  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  для координаты надреза  $x_c = 200$  м и различных больших значений  $l$  (в м). Видно, что при одной и той же собственной частоте существуют два значения параметра  $m$ ; такой вывод также следует из квадратного относительно  $m$  уравнения (6).

Если частотное уравнение (6) записать для трех частот свободных продольных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата надреза  $x_c$ , его длина  $l$  и параметр  $m$ . Например, для круговых частот продоль-

ных колебаний штанги  $\omega_1 = 15.8660 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 47.6420 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_3 = 79.5130 \text{ с}^{-1}$  решение обратной задачи дает, что штанга имеет надрез при  $x_c = 56.66 \text{ м}$ ,  $m = 0.448$ ,  $l = 1.13 \text{ м}$ . Данное решение является единственным, что видно из графиков на рис. 4, где приводятся зависимости длины надреза  $l$  от его координаты  $x_c$  при  $m = 0.448$  для вышеприведенных значений круговых частот продольных колебаний штанги, так как видна только одна точка пересечения всех трех кривых.

На рис. 5 приводятся зависимости координаты надреза  $x_c$ , его длины  $l$  и параметра  $m$  от круговых частот продольных колебаний штанги  $\omega_1$ , для  $\omega_2 = 47.6425 \text{ рад/с}$  (линия 1),  $\omega_2 = 47.6430 \text{ рад/с}$  (линия 2),  $\omega_2 = 47.6435 \text{ рад/с}$  (линия 3),  $\omega_3 = 79.5000 \text{ рад/с}$ .

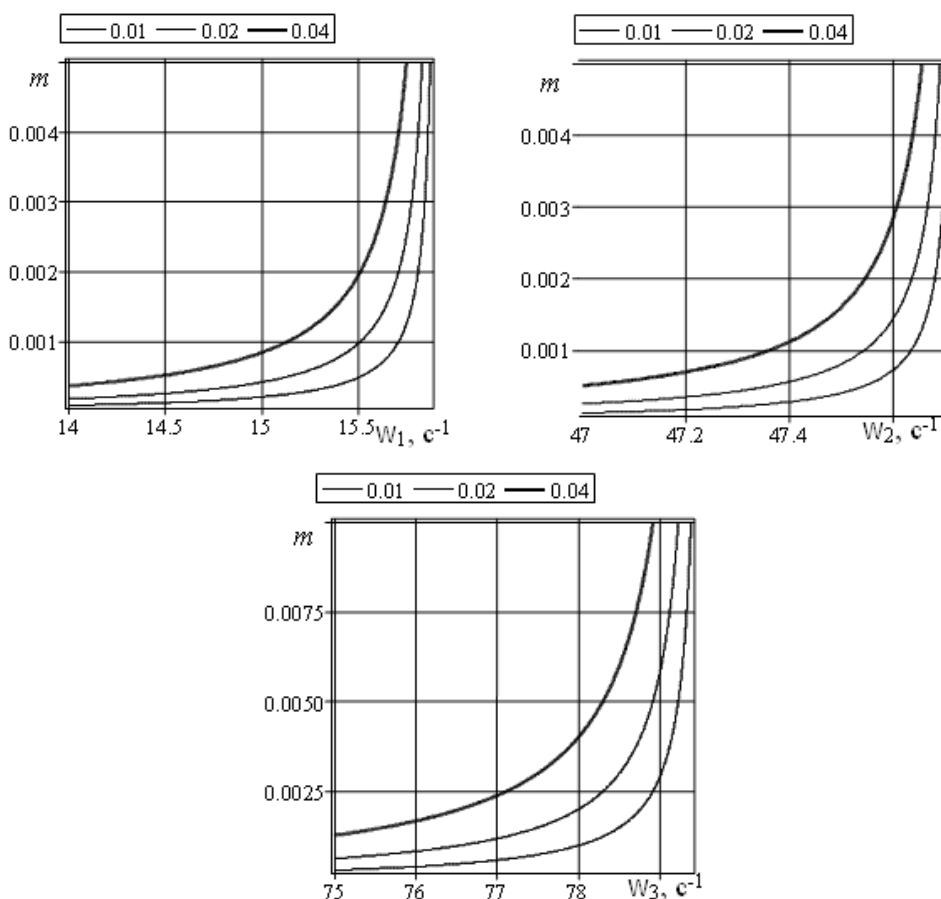


Рисунок 3а. Зависимости параметра  $m$  от круговых частот продольных колебаний штанги  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  для координаты надреза  $x_c = 200 \text{ м}$  и различных  $l$  (в м).

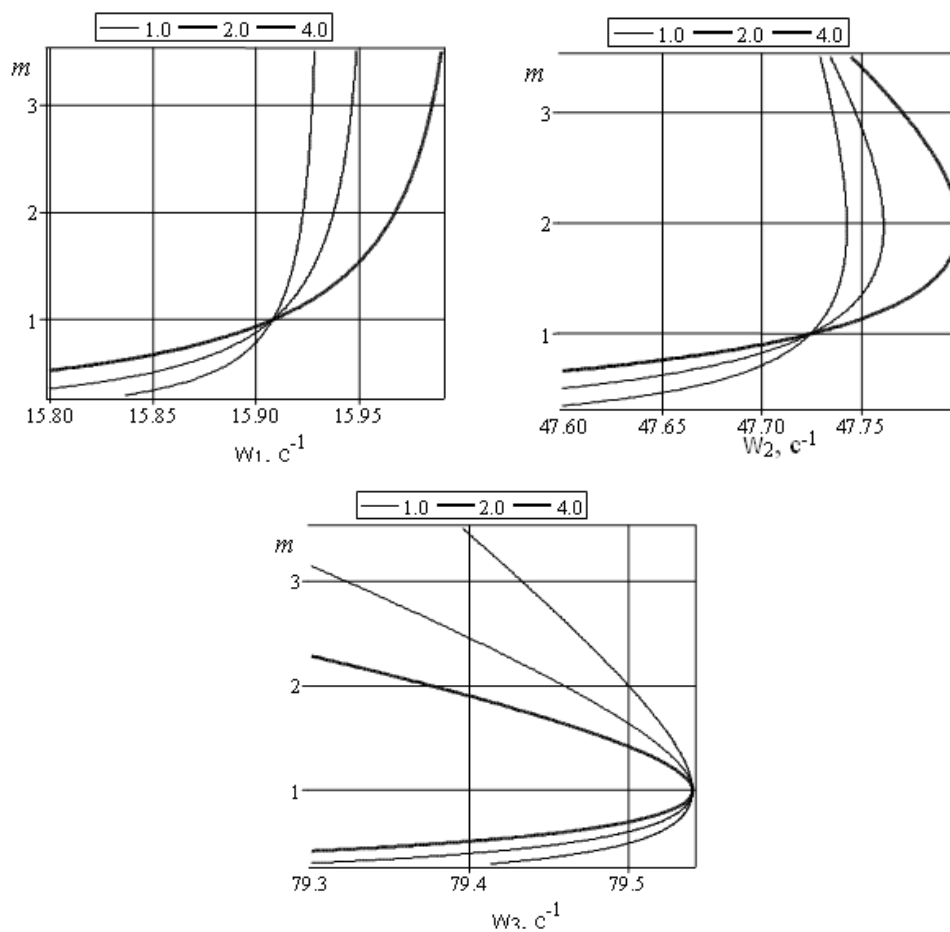


Рисунок 3б. Зависимости параметра  $m$  от круговых частот продольных колебаний штанги  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  для координаты надреза  $x_c = 50$  м и различных  $l$  (в м)

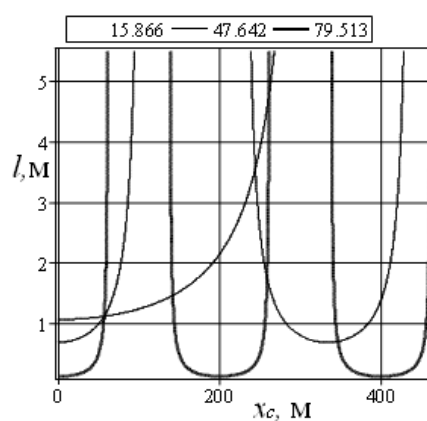


Рисунок 4

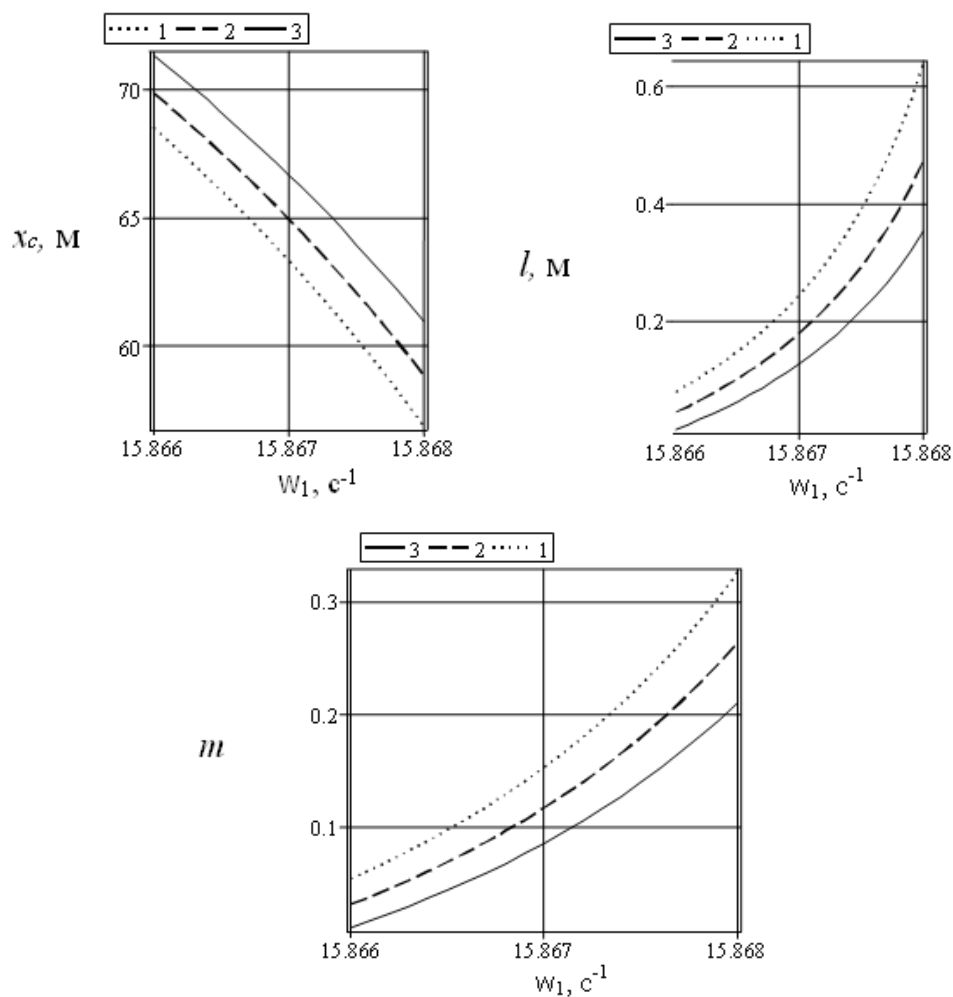


Рисунок 5. Зависимости координаты надреза  $x_c$ , его длины  $l$  и параметра  $m$  от круговой частоты продольных колебаний штанги  $\omega_1$

Проведенные исследования показывают, что по трем частотам свободных продольных колебаний можно определить координату надреза  $x_c$ , его длину  $l$  и параметр надреза  $m$ .

Автор выражает благодарность М.А. Ильгамову за постановку задачи и помощь в выполнении работы.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 08-01-97008-р\_поволжье\_a.



## Литература

1. Ваньков Ю.В., Казаков Р.Б., Яковлева Э.Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://ejta.org> 2005, 5.
2. Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги. Труды института механики УНЦ РАН. Вып. 5. – Уфа: «Гилем». 2007. С.201-211.
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит. 2007. 224 с.
4. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. (Русский перевод: Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. –608 с.
5. Ватульян А. О., Солуянов Н. О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне. // Дефектоскопия. 2005. №9. С. 44-56.
6. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения // М.: Наука, 1974. – 450 с.
7. Разянцев А.О. Виброакустическая диагностика глубиннонасосных штанг в процессе эксплуатации. Диссертация к.т.н., – Уфа: УГНТУ, 1999, -108с.
8. Лопатников С.Л., Гама Б.А., Краутхаузер К., Джиллеспи Дж. Мл. О применимости классического анализа опытов с разрезным стержнем Гопкинсона // Письма в ЖТФ, 2004. Т.30. Вып. 3. С. 39-46.
9. Kolsky N. An investigation of mechanical properties of materials at very high rates of loading // Proceedings of the Physics Society of London. 1949. V. 62. № 359. P. 676-700.
10. Окрушко Е.И., Ураксеев М.А. Дефектоскопия глубиннонасосных штанг. М.: Недра, 1983. – 112 с.
11. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. Том 45. № 6. С. 83-89.