

УДК 51-7

**ТЕПЛОВОЕ ПОЛЕ В ОГРАНИЧЕННОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ
С ЗАДАННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ ДВУХ СЕЧЕНИЙ
И ТЕПЛООБМЕНОМ НА ПОВЕРХНОСТИ**

**THERMAL FIELD IN A BOUNDED CIRCULAR CYLINDER WITH SET
THE TEMPERATURE ON TWO SECTIONS
AND HEAT TRANSFER ON THE SURFACE**

Филиппов А.И., Мухаметзянов Э.В., Леонтьев А.И.
ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
филиал, г. Стерлитамак, Российская Федерация

A.I. Filippov, E.V. Mukhametzyanov, A.I. Leontiev
FSBEI HPE Bashkir State University, branch, Sterlitamak, Russian Federation

e-mail: bigb0y@yandex.ru

Аннотация. В статье найдены решения задач о тепловом поле в ограниченном цилиндре кругового сечения с источником тепла, поддерживающим постоянную или изменяющуюся со временем температуру в верхнем сечении. Искомая температура представляется в виде суммы стационарной и нестационарной частей, для построения решения которых применен метод разделения переменных. В частных случаях из найденного решения следуют ранее известные классические температурные зависимости. На основе найденного решения произведены расчеты пространственно-временных зависимостей температуры применительно к установке для исследования коэффициента трансцилляторного переноса.

Полученные решения используются для определения эффективного коэффициента температуропроводности в алгоритмах обратных задач на основе метода наименьших квадратов. В работе на основе полученных решений определены дополнительные требования к экспериментальным температурным измерениям, реализация которых позволит поднять точность измерения теплофизических параметров.

Abstract. The solutions of problems of thermal field in a finite cylinder of circular cross section with a heat source that supports the constant or varying over time temperature in the upper section have been found. The desired temperature is represented in the sum of the stationary and non-stationary parts in order to build the solutions by using the method of partition. In particular cases the previously known classical temperature dependence can be found according to the solution. Based on the

obtained solution the calculations of spatio-temporal dependencies in relation to the temperature for the study of transcellular transfer coefficient have been received.

The resulting solutions are used in the algorithms of inverse problems on the basis of the least squares method to determine the effective coefficient of thermal diffusivity. In this paper the additional requirements to the experimental temperature measurements have been identified on the basis of the solution that will provide the accuracy of the heat-physical parameters.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа, цилиндрическая система координат, коэффициент теплоотдачи, эффективный коэффициент температуропроводности, метод разделения переменных, явление Гиббса.

Keywords: heat conduction equation, Laplace equation, cylindrical coordinate system, heat transfer coefficient, effective thermal diffusivity, method of partition, Gibbs phenomenon.

В современных технологических процессах широко распространены устройства, в которых тепло- и массообменные процессы интенсифицируются с помощью барботажа, вызванного всплыванием газовых пузырьков. Теория, позволяющая описать процессы интенсификации при барботаже, представлена в работах [1, 4 – 6]. Для проверки разработанной теории нами создана установка, основным элементом которой, в отличие от [7], является цилиндрическая емкость, заполненная водой. По оси цилиндра расположены датчики температуры. Для уменьшения влияния естественной тепловой конвекции источник тепла расположен в верхней части цилиндра.

Измерение нестационарного температурного поля при наличии всплывающих пузырьков и их отсутствии позволяет определить эффективный коэффициент и реализовать сравнительный метод измерения вклада барботажной составляющей переноса. К сожалению, теории тепловых процессов, которая могла бы быть использована для определения коэффициента температуропроводности, пока нет.

В данной статье обсуждаются решения задач, которые могут быть использованы при компьютерном определении теплофизических параметров на основе экспериментального измерения температурных полей.

Постановка задачи с постоянной температурой нагревателя. Рассмотрим температурное поле в цилиндре радиуса r_0 и высоты h (рисунок 1). Ось z цилиндрической системы координат направим по оси цилиндра сверху вниз.



Рисунок 1. Геометрия задачи

Температуру жидкости внутри резервуара в начальный момент времени обозначим θ_0 . Полагаем, что она равна температуре окружающей среды.

В верхней части резервуара $z=0$ установлен нагревательный элемент, который поддерживает температуру θ_h . Температурное поле определяется путем решения уравнения теплопроводности:

$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \lambda_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (1)$$

с начальным условием

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad (2)$$

где λ_z, λ_r – компоненты тензора теплопроводности. В случае нагревания жидкости без пузырьков среда является изотропной $\lambda_z = \lambda_r$, а в случае газожидкостной среды всплывание газовых пузырьков индуцирует анизотропные свойства, т.е. $\lambda_z \neq \lambda_r$.

Температура верхнего круга $z=0$ определяется температурой нагревателя

$$\theta|_{z=0} = \theta_h, \quad (3)$$

которая на первом этапе решения считается постоянной.

Температура нижнего круга $z=h$ совпадает с температурой окружающей среды

$$\theta|_{z=h} = \theta_0. \quad (4)$$

Теплообмен с окружающей средой на боковой поверхности цилиндра описывается по закону Ньютона

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\frac{k}{\lambda_r} (\theta|_{r=r_0} - \theta_0), \quad (5)$$

где k – коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности цилиндра. В безразмерных переменных

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_h - \theta_0}, \quad \tau = \frac{\lambda_z t}{c\rho r_0^2}, \quad \frac{\lambda_r}{\lambda_z} = \frac{1}{a}, \quad z = \frac{z_d}{r_0}, \quad r = \frac{r_d}{r_0}, \quad (6)$$

математическая постановка задачи запишется как:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (7)$$

$$T|_{z=0} = 1, \quad T|_{z=\frac{h}{r_0}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = -\frac{kr_0}{\lambda_r} T|_{r=1}, \quad (8)$$

$$T|_{\tau=0} = 0.$$

Далее искомая температура представляется в виде суммы стационарной $S(r, z)$ и нестационарной частей $N(r, z, \tau)$

$$T = S + N. \quad (9)$$

Стационарное решение удовлетворяет аксиально симметричному уравнению Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) = 0 \quad (10)$$

с граничными условиями:

$$S|_{z=0} = 1, \quad (11)$$

$$S|_{z=\frac{h}{r_0}} = 0, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial r} \right|_{r=1} = -\frac{kr_0}{\lambda_r} S|_{r=1} \quad (13)$$

Поэтому нестационарная часть N удовлетворяет следующей вспомогательной задаче:

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial N}{\partial r} \right), \quad (14)$$

$$N|_{z=0} = 0, \quad (15)$$

$$N|_{z=\frac{h}{r_0}} = 0, \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial N}{\partial r} \right|_{r=1} = -\frac{kr_0}{\lambda_r} N|_{r=1}, \quad (17)$$

и начальными условиями

$$N|_{\tau=0} = -S \quad (18)$$

Легко убедиться, что сложив вспомогательные задачи (10) – (13) и (14) – (18), получим исходную задачу (7), (8).

Сначала найдем *решение стационарной задачи*:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) = 0, \quad (19)$$

$$S|_{z=0} = 1, \quad (20)$$

$$S|_{z=\frac{h}{r_0}} = 0, \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial r} \right|_{r=1} = -\frac{kr_0}{\lambda_r} S|_{r=1}. \quad (22)$$

Для построения решения стационарной задачи применим метод разделения переменных. Частные решения уравнения будем искать в виде произведения $S(r, z) = Z(z)R(r)$. Подставив это выражение в уравнение (19) и разделив обе части уравнения на $Z(z)R(r)$, получим:

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\frac{1}{arR} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) = \beta^2 \quad (23)$$

Поскольку функции $Z(z)$, $R(r)$ зависят от разных переменных, то равенство возможно тогда и только тогда, когда выражения по обе стороны равны постоянной величине β^2 . Уравнение для $Z(z)$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \beta^2 Z = 0 \quad (24)$$

имеет решение

$$Z = A_1 e^{\beta z} + A_2 e^{-\beta z} \quad (25)$$

Подставив (25) в граничные условия (21), получим:

$$A_2 = -A_1 e^{2\beta \frac{h}{r_0}}, \quad (26)$$

поэтому решение уравнения (25) запишем в виде:

$$Z = A_1 \left(e^{\beta z} + e^{-\beta \left(z - 2 \frac{h}{r_0} \right)} \right) \quad (27)$$

Решение уравнения для $R(r)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \beta^2 a R = 0 \quad (28)$$

представляется как

$$R = B_1 J_0(\sqrt{a\beta}r) + B_2 Y_0(\sqrt{a\beta}r) \quad (29)$$

Из него следует, что при $r \rightarrow 0$ решение стремится к бесконечности $R \rightarrow \infty$, поскольку функция Бесселя Y_0 в нуле является сингулярной, поэтому постоянную перед ней необходимо приравнять к нулю $B_2 = 0$. Искомое решение примет вид:

$$R = B_1 J_0(\sqrt{a\beta}r) \quad (30)$$

Подставив это решение в граничное условие (22), получим следующее трансцендентное алгебраическое уравнение для определения β_n :

$$\beta B_1 J_1(\sqrt{a}\beta_n) - \frac{kr_0}{\sqrt{a}\lambda_r} B_1 J_0(\sqrt{a}\beta_n) = 0 \quad (31)$$

$$\beta J_1(\sqrt{a}\beta) = \frac{kr_0}{\lambda_r \sqrt{a}} J_0(\sqrt{a}\beta) \quad (32)$$

Общее решение стационарной задачи (19) – (22) представляется в виде бесконечной суммы частных решений:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(e^{\beta_n z} - e^{-\beta_n \left(z - 2\frac{h}{r_0} \right)} \right) J_0(\sqrt{a}\beta_n r) \quad (33)$$

Для нахождения C_n подставим решение в граничное условие (20) при $z = 0$

$$S|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (1 - e^{\beta_n z}) J_0(\sqrt{a}\beta_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{a}\beta_n r) = 1 \quad (34)$$

Умножив обе части (34) на $r J_0(\sqrt{a}\beta_m r)$, проинтегрируем от 0 до 1 по dr

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 J_0(\sqrt{a}\beta_n r) r J_0(\sqrt{a}\beta_m r) dr = \int_0^1 r J_0(\sqrt{a}\beta_m r) dr \quad (35)$$

Далее воспользовавшись известными интегралами [2, с. 195 – 197]

$$\int_0^1 J_0(\sqrt{a}\beta_n r) r J_0(\sqrt{a}\beta_m r) dr = \begin{cases} 0, & \text{при } \beta_n \neq \beta_m \\ \frac{1}{2a\beta_m^2} \left[\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2} + a\beta_m^2 \right] J_0^2(\sqrt{a}\beta_m), & \text{при } \beta_n = \beta_m, \end{cases} \quad (36)$$

получим из (35)

$$A_m \int_0^1 r J_0^2(\sqrt{a}\beta_m r) dr = \int_0^1 r J_0(\sqrt{a}\beta_m r) dr \quad (37)$$

Если дополнительно учесть, что

$$\int_0^1 r J_0(\sqrt{a}\beta_m r) dr = \frac{1}{\sqrt{a}\beta_m} J_1(\sqrt{a}\beta_m) \quad (38)$$

которое следует из [3, с. 697], то получим выражение для коэффициентов разложения

$$A_m = 2 \frac{J_1(\sqrt{a}\beta_m)}{\sqrt{a}\beta_m \left(\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2 \beta_m^2 a} + 1 \right) J_0^2(\sqrt{a}\beta_m)} \quad (39)$$

С помощью граничного условия (22), имеем:

$$\left. \frac{\partial J_0(\sqrt{a}\beta_m r)}{\partial r} \right|_{r=1} = -\sqrt{a}\beta_m J_1(\sqrt{a}\beta_m r)|_{r=1} = -\frac{kr_0}{h} J_0(\sqrt{a}\beta_m r)|_{r=1} \quad (40)$$

Выразив $J_1(\sqrt{a}\beta_m)$ из (40) и подставив в (39), получим окончательное выражение для A_m :

$$A_m = 2 \frac{kr_0}{\lambda_r} \frac{1}{\left(\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2} + \beta_m^2 a \right) J_0(\sqrt{a}\beta_m)} \quad (41)$$

Окончательно общее решение стационарной задачи с помощью (34) представится как:

$$S = 2kr_0\lambda_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 r_0^2 + a\beta_n^2 \lambda_r^2} \frac{\text{sh}(\beta_n(h/r_0 - z))}{\text{sh}(\beta_n h/r_0)} \frac{J_0(\sqrt{a}\beta_n r)}{J_0(\sqrt{a}\beta_n)} \quad (42)$$

Задача для нестационарной части

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial N}{\partial r} \right), \quad (43)$$

$$N|_{z=0} = 0, \quad (44)$$

$$N|_{z=\frac{h}{r_0}} = 0, \quad (45)$$

$$\left. \frac{\partial N}{\partial r} \right|_{r=1} = -\frac{kr_0}{\lambda_r} N|_{r=1}, \quad (46)$$

$$N|_{\tau=0} = -S \quad (47)$$

также решается методом разделения переменных:

$$N = Z(z)R(r)P(\tau). \quad (48)$$

Подставив выражение (48) в уравнение (43) и разделив обе части уравнения на $Z(z)R(r)P(\tau)$, получим:

$$\frac{P'_\tau}{P} = \frac{Z''_{zz}}{Z} + \frac{1}{a} \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right). \quad (49)$$

Поскольку функции $Z(z)$, $R(r)$, $P(\tau)$, зависят от разных переменных, то равенство (49) возможно тогда и только тогда, когда $\frac{P'_\tau}{P}$, $\frac{Z''_{zz}}{Z}$, $\frac{1}{a} \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right)$ – постоянные величины, т.е. не зависящие от переменных дифференцирования:

$$\frac{P'_\tau}{P} = -\alpha^2, \quad \frac{Z''_{zz}}{Z} = -\gamma^2, \quad \frac{1}{a} \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\delta^2. \quad (50)$$

Для постоянных разделения справедливо следующее соотношение:

$$\alpha^2 = \gamma^2 + \delta^2. \quad (51)$$

Решение уравнения:

$$\frac{P'_\tau}{P} = -\alpha^2 \quad (52)$$

имеет вид:

$$P = Ce^{-\alpha^2 \tau}. \quad (53)$$

Уравнение для Z :

$$Z''_{zz} + \gamma^2 Z = 0 \quad (54)$$

имеет решение:

$$Z = A_1 \cos(\gamma z) + A_2 \sin(\gamma z). \quad (55)$$

Из граничного условия (44), следует $A_1 = 0$, поэтому:

$$Z = A_2 \sin(\gamma z). \quad (56)$$

Из условия (45) $A_2 \sin(\gamma h / r_0) = 0$ следует выражение для одной из констант разделения:

$$\gamma_k = \frac{\pi r_0 k}{h}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (57)$$

Окончательно решение для Z имеет вид:

$$Z_k = A_k \sin\left(\frac{\pi r_0 k}{h} z\right) \quad (58)$$

Уравнение для R :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \delta^2 a R = 0 \quad (59)$$

имеет решение:

$$R = B_1 J_0(\sqrt{a} \delta r) + B_2 Y_0(\sqrt{a} \delta r), \quad (60)$$

в котором, как и в стационарном случае, следует положить $B_2 = 0$:

$$R = B_1 J_0(\sqrt{a} \delta r). \quad (61)$$

Подставим решение в граничное условие (46)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = B_1 \frac{\partial}{\partial r} J_0(\sqrt{a} \delta r) \Big|_{r=1} = -\sqrt{a} \delta B_1 J_1(\sqrt{a} \delta) = -\frac{kr_0}{\lambda_r} B_1 J_0(\sqrt{a} \delta), \quad (62)$$

откуда трансцендентное уравнение для определения δ_p , $p = 1, 2, \dots$ представляется как

$$\delta_p J_1(\sqrt{a} \delta_p) = \frac{kr_0}{\lambda_r \sqrt{a}} J_0(\sqrt{a} \delta_p). \quad (63)$$

Уравнения для определения β_n – (31) – и δ_p – (63) – совпадают. Следовательно, $\beta_n = \delta_p$ при $n = p$.

Решение для радиального фактора представляется в виде:

$$R_p = B_p J_0(\sqrt{a} \beta_p r). \quad (64)$$

Для констант имеет место соотношение:

$$\alpha_{kp}^2 = \left(\frac{\pi r_0 k}{h} \right)^2 + \beta_p^2 \quad (65)$$

Решение нестационарной задачи имеет вид:

$$N = \sum_{kp=1}^{\infty} C_{kp} e^{-\alpha_{kn}^2 \tau} \sin(\gamma_k z) J_0(\sqrt{a} \beta_p r) \quad (66)$$

Для нахождения C_{kp} подставим решение (66) в начальное условие: (47)

$$\sum_{kp=1}^{\infty} C_{kp} \sin(\gamma_k z) J_0(\sqrt{a} \beta_p r) = -S(z, r) \quad (67)$$

Умножив обе части на $\sin(\gamma_s z)$ и $r J_0(\sqrt{a} \beta_l r)$, проинтегрируем от 0 до h/r_0 по dz и от 0 до 1 по dr :

$$\begin{aligned} \sum_{kp=1}^{\infty} C_{kp} \int_0^{h/r_0} \sin(\gamma_k z) \sin(\gamma_s z) dz \int_0^1 r J_0(\sqrt{a} \beta_p r) J_0(\sqrt{a} \beta_l r) dr = \\ = - \int_0^{h/r_0} \int_0^1 \sin(\gamma_s z) r J_0(\sqrt{a} \beta_l r) S(z, r) dr dz. \end{aligned} \quad (68)$$

Вычисление интеграла:

$$\int_0^{h/r_0} \sin(\gamma_k z) \sin(\gamma_s z) dz = \begin{cases} 0, & \text{при } \gamma_k \neq \gamma_s \\ \frac{h}{2r_0}, & \text{при } \gamma_k = \gamma_s \end{cases} \quad (69)$$

особых трудностей не представляет. С учетом (36) получим:

$$\begin{aligned} C_{sl} \frac{h}{2r_0} \frac{1}{2a\beta_l^2} \left[\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2} + a\beta_l^2 \right] J_0^2(\sqrt{a} \beta_l) = \\ = - \int_0^{h/r_0} \int_0^1 \sin(\gamma_s z) r J_0(\sqrt{a} \beta_l r) \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2kr_0}{\lambda_r \left(\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2} + a\beta_n^2 \right)} \frac{\operatorname{sh} \left(\beta_n \left(\frac{h}{r_0} - z \right) \right)}{\operatorname{sh} \left(\beta_n \frac{h}{r_0} \right)} \frac{J_0(\sqrt{a} \beta_n r)}{J_0(\sqrt{a} \beta_n)} dr dz \end{aligned} \quad (70)$$

Отсюда коэффициент C_{sl} равен:

$$C_{sl} = - \frac{4kr_0^2 \gamma_s}{h\lambda_r (\gamma_s^2 + \beta_l^2) \left(\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2} + a\beta_l^2 \right) J_0(\sqrt{a}\beta_l)} \quad (71)$$

Окончательно решение нестационарной задачи имеет вид:

$$N = - \frac{4kr_0^2 \lambda_r}{h} \sum_{k,p=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(\gamma_k^2 + \beta_p^2) (k^2 r_0^2 + a\beta_p^2 \lambda_r^2) J_0(\sqrt{a}\beta_p)} e^{-\alpha_{kn}^2 \tau} \sin(\gamma_k z) J_0(\sqrt{a}\beta_p r). \quad (72)$$

Решение задачи с постоянной температурой источника. Сложив решения стационарной и нестационарной задач, получим решение исходной задачи: (7), (8)

$$T = S + N = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2kr_0}{\lambda_r \left(\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2} + a\beta_p^2 \right)} \frac{J_0(\sqrt{a}\beta_p r)}{J_0(\sqrt{a}\beta_p)} \times$$

$$\times \left[\frac{\text{sh}\beta_p \left(\frac{h}{r_0} - z \right)}{\text{sh}\beta_p \frac{h}{r_0}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2r_0 \gamma_k}{(\gamma_k^2 + \beta_p^2)} e^{-\alpha_{kn}^2 \tau} \sin(\gamma_k z) \right]. \quad (73)$$

Окончательно выражение для температуры в размерном виде запишется в форме:

$$\theta = \theta_0 + (\theta_n - \theta_0) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2kr_0}{\lambda_r \left(\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2} + a\beta_p^2 \right)} \frac{J_0\left(\sqrt{\frac{\lambda_r}{\lambda_z}} \frac{\beta_p r}{r_0}\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{\lambda_r}{\lambda_z}} \beta_p\right)} \times$$

$$\times \left[\frac{\text{sh}\beta_p \left(\frac{h - z_d}{r_0} \right)}{\text{sh}\beta_p \frac{h}{r_0}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2r_0 \gamma_k}{(\gamma_k^2 + \beta_p^2)} e^{-\alpha_{kn}^2 \frac{\lambda_z t}{cp r_0^2}} \sin\left(\gamma_k \frac{z_d}{r_0}\right) \right]. \quad (74)$$

Переменная температура нагревателя. При пропускании пузырьков газа из-за недостатка мощности нагревателя и интенсивного теплообмена в среде обеспечить постоянство температуры нагревателя температура нагревателя затруднительно. В экспериментальной установке температура нагревателя возрастает постепенно от температуры окружающей среды θ_0 до температуры

нагревателя θ_h , равной 50°C , поэтому в задаче следует полагать, что температура нагревателя зависит от времени $\theta_h(t)$. Ниже приведено решение задачи с переменной температурой нагревателя $\theta_h(t)$.

Температура в этой задаче также находится путем решения уравнения теплопроводности:

$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} + \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \right) \quad (75)$$

Начальное условие не изменяется:

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \quad (76)$$

В отличие от предыдущего случая, полагаем, что температура нагревателя зависит от времени по заданной зависимости, которая измеряется экспериментально:

$$\theta|_{z_d=0} = \theta_h(t) \quad (77)$$

Температура нагревателя в начальный момент времени и температура на нижнем конце цилиндра равны температуре окружающей среды:

$$\theta_h|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta|_{z_d=h} = \theta_0 \quad (78)$$

Температура на стенках удовлетворяет соотношению:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r_d} \right|_{r_d=r_0} = -\frac{k}{\lambda_r} (\theta|_{r_d=r_0} - \theta_0) \quad (79)$$

Безразмерная температура в этом случае определяется несколько иным способом:

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_{h\max} - \theta_0} \quad (80)$$

где $\theta_{h\max}$ – максимальная температура нагревателя. Остальные безразмерные переменные не изменяются.

Математическая постановка задачи запишется как:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{a} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (81)$$

$$T|_{z=0} = T_h(\tau), \quad T|_{z=\frac{h}{r_0}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = -\frac{k r_0}{\lambda_r} T|_{r=1}, \quad (82)$$

$$T|_{\tau=0} = 0.$$

Решение задачи отыскиваем в виде временной свертки производной от температуры нагревателя по времени с функцией Грина $G(\tau, r, z)$:

$$T = \int_0^\tau G(\tau - \tau') \frac{\partial}{\partial \tau} (T_h(\tau')) d\tau', \quad (83)$$

тогда задача для функции Грина G :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right), \quad (84)$$

$$G|_{z=0} = 1, \quad G|_{z=\frac{h}{r_0}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=1} = -\frac{k r_0}{\lambda_r} G|_{r=1}, \quad (85)$$

$$G|_{\tau=0} = 0.$$

с точностью до обозначений совпадает с задачей (7), (8), поэтому выражение для функции Грина представляется в виде:

$$G(\tau, z, r) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2kr_0}{\lambda_r \left(\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2} + a\beta_p^2 \right)} \frac{J_0(\sqrt{a}\beta_p r)}{J_0(\sqrt{a}\beta_p)} \times \left[\frac{\text{sh}\beta_p \left(\frac{h}{r_0} - z \right)}{\text{sh}\beta_p \frac{h}{r_0}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2r_0 \gamma_k}{\left(\gamma_k^2 + \beta_p^2 \right)} e^{-\alpha_{kn}^2 \tau} \sin(\gamma_k z) \right]. \quad (86)$$

где $\gamma_k = \pi r_0 k / h$, а уравнение для определения β_p записывается как:

$$\beta_p J_1(\sqrt{a}\delta) = \frac{k r_0}{\lambda_r \sqrt{a}} J_0(\sqrt{a}\beta_p) \quad (87)$$

Выражение для безразмерной температуры имеет вид:

$$T = \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \tau'} (T_n(\tau')) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2k r_0}{\lambda_r \left(\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2} + a\beta_p^2 \right)} \frac{J_0(\sqrt{a}\beta_p r)}{J_0(\sqrt{a}\beta_p)} \times \left[\frac{\text{sh}\beta_p \left(\frac{h}{r_0} - z \right)}{\text{sh}\beta_p \frac{h}{r_0}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2r_0 \gamma_k}{(\gamma_k^2 + \beta_p^2)} e^{-\alpha_{kn}^2 (\tau - \tau')} \sin(\gamma_k z) \right] d\tau' \quad (88)$$

Окончательное выражение для температуры запишется в форме:

$$\theta = \theta_0 + (\theta_{n\max} + \theta_0) \cdot \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \tau'} (T_n(\tau')) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2k r_0}{\lambda_r \left(\frac{k^2 r_0^2}{\lambda_r^2} + a\beta_p^2 \right)} \frac{J_0(\sqrt{a}\beta_p r)}{J_0(\sqrt{a}\beta_p)} \times \left[\frac{\text{sh} \left[\beta_p \left(\frac{h}{r_0} - z \right) \right]}{\text{sh} \left(\beta_p \frac{h}{r_0} \right)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2r_0 \gamma_k}{(\gamma_k^2 + \beta_p^2)} e^{-\alpha_{kn}^2 (\tau - \tau')} \sin(\gamma_k z) \right] d\tau' \quad (89)$$

Полученные решения прямых задач предназначены для определения таких физических параметров, как эффективная теплопроводность, температуропроводность, коэффициент теплоотдачи, на основе результатов измерения температуры в созданной установке. Такая возможность обеспечивается на основе использования решений прямых задач в алгоритмах обратных задач на основе метода наименьших квадратов. При составлении программ решающее значение имеет учет особенностей поведения решения в определенных условиях и эффектов типа явления Гиббса, которые и определяют достоверность полученных значений физических величин. Для определения таких особенностей поведения решения, которые могут приводить к недостоверным результатам, необходимо осуществление расчетов во всем диапазоне физических параметров и их детальный анализ.

Анализ результатов расчетов. На рисунке 2 представлены графики изменения температуры от вертикальной координаты z в центре резервуара с

водой ($\lambda_r = \lambda_z = 0,6$ Вт/(м К)) в различные моменты времени при параметре теплообмена $k = 10$ м⁻¹.

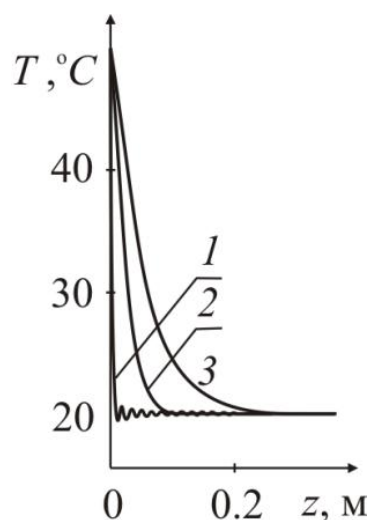


Рисунок 2. Распределение температуры по глубине в центре резервуара в моменты времени 1 – 60, 2 – 3600, 3 – 36000 с

Как видно из рисунка 2, температура воды при глубине, меньше 0,1 м, меняется почти по линейному закону, при глубинах больше 0,1 м температура воды сближается с температурой окружающей среды. Из рисунка 2 также следует, что при малых значениях времени (кр. 1) наблюдается чередование максимумов и минимумов, причины возникновения которых связаны с явлением Гиббса, поскольку при уменьшении времени распределение температуры стремится к скачкообразному изменению в точке $z = 0$.

На рисунке 3. приведены результаты расчетов зависимости температуры от z на оси резервуара с водой ($\lambda_r = \lambda_z = 0,6$ Вт/(м К)) для малых времен, при различных количествах, слагаемых в частных суммах ряда Фурье при значении параметра теплообмена $k = 10$ м⁻¹. Из рисунка 3 следует, что при увеличении числа слагаемых в частой сумме Фурье точность расчетов температуры для малых времен возрастает. Однако широко используемая программа Mathcad позволяет вычислить ряд с числом слагаемых только до 100.

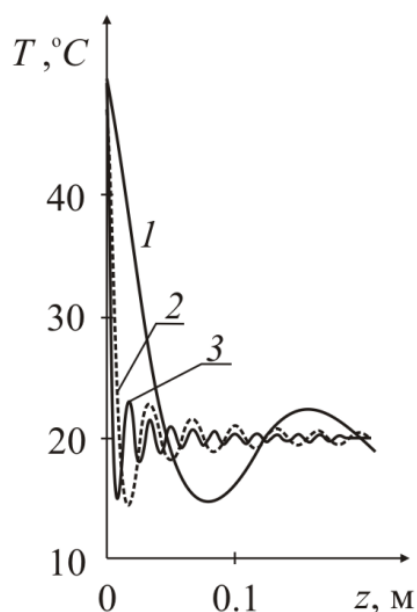


Рисунок 3. Результаты расчетов зависимости температуры от z на оси резервуара для малых времен, при различных количествах слагаемых в частных суммах ряда Фурье: 1 – $n = 10$, 2 – 50, 3 – 10,0

На рисунке 4 приведены результаты расчетов зависимости температуры от z на оси резервуара с водой ($\lambda_r = \lambda_z = 0.6$ Вт/(м К)) для малых времен. Число слагаемых в частных суммах ряда Фурье равно 100, значение параметра теплообмена $k=10$ м⁻¹.

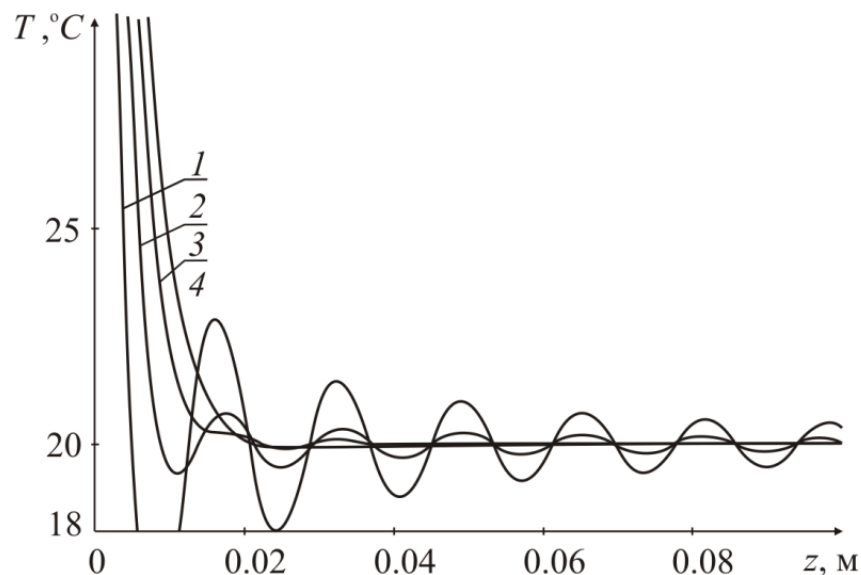


Рисунок 4. Распределение температуры по глубине в центре резервуара: 1 – в начальный момент времени и в моменты времени: 2 – 60, 3 – 120, 4 – 180 с

Из сравнения поведения кривых 1 – 4 на рисунке 4 следует, что даже при числе слагаемых в частных суммах ряда Фурье, равном 100, решение соответствует правдоподобному, только начиная с момента времени $t=3$ мин.

Этот факт требует серьезного анализа возможности включения точек, соответствующих малым временам, в число используемых для решения обратных задач.

На рисунке 5 представлены радиальные распределения температуры в резервуаре с водой при значении параметра теплообмена $k=10 \text{ м}^{-1}$ для больших времен на уровне расположения нагревателя (кр. 1) и расстояниях 12, 24, 36, 48, 60, 74 см от него.

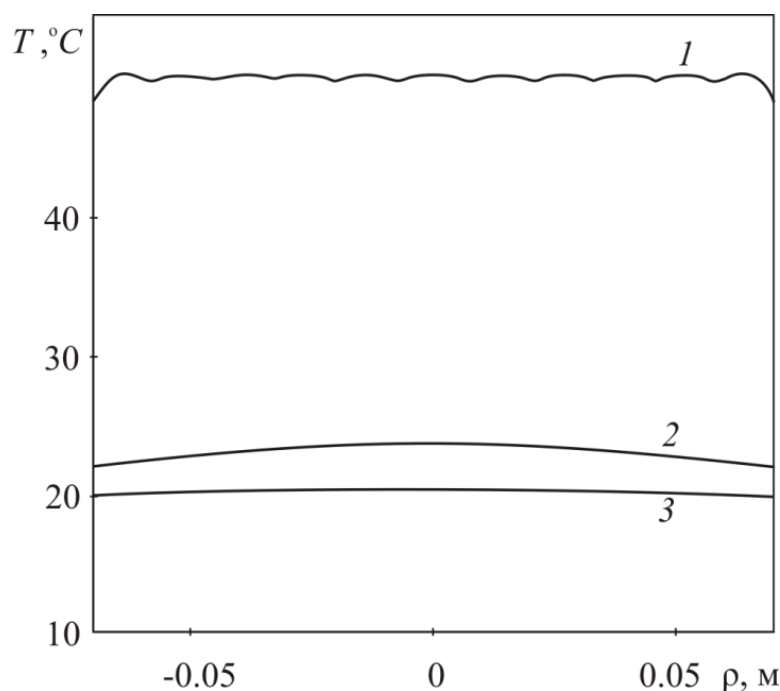


Рисунок 5. Радиальное распределение температуры через 24 часа:

1 – на уровне расположения нагревателя и на расстояниях:

$$2 - 12, 3 - 24 \text{ см от нагревателя; } \rho = \begin{cases} r, \varphi = 0, \\ -r, \varphi = \pi \end{cases}$$

Из рисунка следует, что в случае заполнения водой возмущения температуры от нагревателя локализованы на расстоянии 10 см. Заметим, что при пропускании пузырьков возмущения температурного поля охватывают весь объем цилиндра. Этот факт имеет важное значение для выбора расположения датчиков в рабочем объеме установки.

На рисунках 6 – 8 представлены зависимости температуры от радиуса вблизи нагревателя в резервуаре с водой при различных параметрах теплообмена.

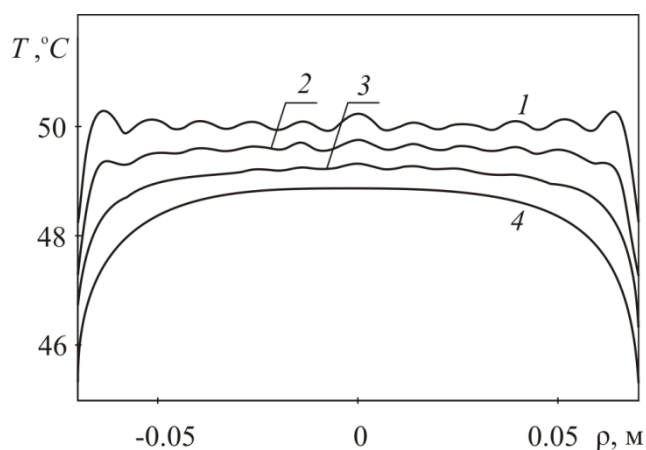


Рисунок 6. Радиальное распределение температуры через 24 часа: 1 – на уровне расположения нагревателя и на расстояниях: 2 – 1 мм, 3 – 2 мм, 3 – 3 мм от нагревателя, при значении параметра теплообмена $k=10 \text{ м}^{-1}$

Из рисунка 6 следует, что вблизи от нагревателя также возникают максимумы и минимумы, причины возникновения которых, как и в предыдущем случае, связаны с явлением Гиббса.

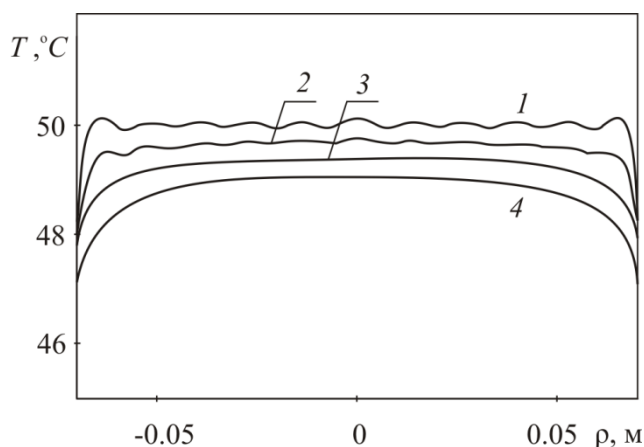


Рисунок 7. Радиальное распределение температуры через 24 часа: 1 – на уровне расположения нагревателя и на расстояниях: 2 – 1 мм, 3 – 2 мм, 3 – 3 мм от нагревателя, при значении параметра теплообмена $k=5 \text{ м}^{-1}$

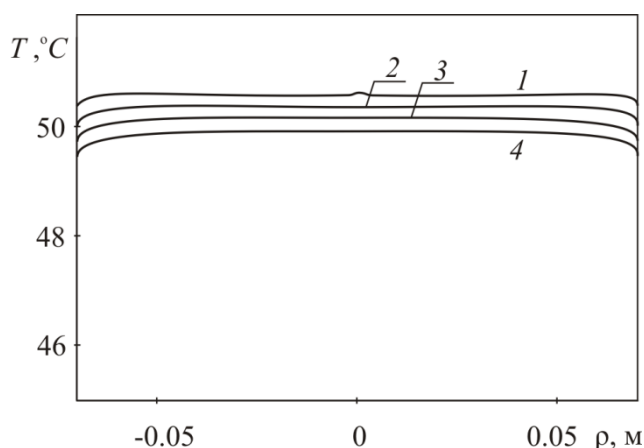


Рисунок 8. Радиальное распределение температуры через 24 часа: 1 – на уровне расположения нагревателя и на расстояниях: 2 – 1 мм, 3 – 2 мм, 3 – 3 мм от нагревателя, при значении параметра теплообмена $k=1 \text{ м}^{-1}$

Из сопоставления кривых на рисунках 6 – 8 следует, что возникновение явления Гиббса вблизи нагревателя зависит от величины параметра теплообмена. Из анализа кривых следуют также ограничения на расположение датчиков

температуры. При малых значениях параметра теплообмена датчик температуры может быть приближен к нагревателю, в противном случае измерение температуры в экспериментальной установке следует осуществлять на достаточном удалении от нагревателя.

Выводы

Итак, на основе решения спектральных задач о температурном поле нагревателя в сосуде цилиндрической формы и анализа произведенных расчетов, определены дополнительные требования к экспериментальным температурным измерениям, реализация которых позволит поднять точность измерения параметров интенсификации теплообмена.

Литература

1. Нигматуллин Р.И., Филиппов А.И., Хисматуллин А.С. Трансцилляторный перенос тепла в жидкости с газовыми пузырьками // Теплофизика и аэромеханика, 2012. Т. 19, №5. С 595 – 612.
2. Карслоу Г., Егерь Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
4. Уравнения с периодическими коэффициентами и теория хаоса/ Нигматуллин Р.И. и др. // Статика и динамика упорядоченных сред: межвузовск. науч. сб. Уфа: Башк. ун-т. 1994.С. 81-93
5. Филиппов А.И., Филиппов К.А. О диффузии под воздействием звука // Акустический журнал. 1999. Т. 45, №3. С. 414-417.
6. Marie J.L. Modeling of the skin friction and heat transfer in turbulent two component bubbly flow in pipes // Int.J. Multiphase Flow, 1987. Vol. 13. P. 309-325.
7. Филиппов А.И., Минлибаев М.Р., Хисматуллин А.С. Установка для исследования коэффициента температуропроводности в жидкости// Новые промышленные технологии. 2010. №2. С. 62-63.

References

1. Nigmatullin R.I., Filippov A.I., Khismetullin A.S. Transsilyatornyj perenos tepla v zhidkosti s gazovymi puzyr'kami// Teplofizika i aehromekhanika, 2012. Tom 19. №5. S 595 – 612. [in Russian].
2. Karlsru G., Eger' D. Teploprovodnost' tverdykh tel. M.: Nauka, 1964. 488 s. [in Russian].
3. Gradshtejn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenij. M.: Fizmatgiz, 1963. 1100 s. [in Russian].

4. Uravneniya s periodicheskimi koefitsientami i teoriya khaosa /Nigmatullin R.I. и др. // Statika i dinamika uporyadochennykh sred: mezhvuzovsk. nauch. sb. Ufa, Bashk. un-t. 1994. S. 81-93. [in Russian].
5. Filippov A.I., Filippov K.A. O diffuzii pod vozdeystviem zvuka // Akusticheskij zhurnal, 1999. T. 45, №3. S. 414-417. [in Russian].
6. Marie J.L. Modeling of the skin friction and heat transfer in turbulent two component bubbly flow in pipes // Int.J. Multiphase Flow, 1987.Vol. 13. P. 309-325.
7. Filippov A.I., Minlibaev M.R., K Hismatullin A.S. Ustanovka dlya issledovaniya koefitsienta temperaturoprovodnostiv zhidkosti// Novye promyshlennye tekhnologii, 2010. №2. S. 62-63. [in Russian].

Сведения об авторах

Филиппов А.И. д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой «Теоретическая физика и методика обучения физике», ФГБОУ ВПО БашГУ, филиал, г. Стерлитамак, Российская Федерация

A.I. Filippov, dr. techn. sci., prof. head of "Theoretical Physics and Methods of Teaching Physics", FSBEI HPE BSU, of branch Sterlitamak, Russian Federation

Мухаметзянов Э.В., аспирант ФГБОУ ВПО БашГУ, филиал, г. Стерлитамак, Российская Федерация

E.V. Mukhametzyanov, postgraduate FSBEI HPE BSU, of branch Sterlitamak, Russian Federation

Леонтьев А.И., аспирант ФГБОУ ВПО БашГУ, филиал, г. Стерлитамак, Российская Федерация

A.I. Leontiev, postgraduate FSBEI HPE BSU, of branch Sterlitamak, Russian Federation

e-mail: bigb0y@yandex.ru