

КОРРЕКТИРОВКА ТРЕХМЕРНЫХ ЛИТОЛОГО-ФАЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ С УЧЕТОМ РАЗНОРОДНОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Бекман А.Д., Кутрунов В.Н.
Тюменский государственный университет
E-mail: alexbeck@yandex.ru, vkutrunov@utmn.ru

Излагается теоретическое обоснование нового подхода к моделированию литолого-фациальных моделей. Преимущество предлагаемого авторами подхода в том, что он позволяет приводить трехмерные литолого-фациальные модели в соответствие разного рода априорной информации, например, заданной в виде геологических карт, геолого-статистических разрезов и т.д. В частности, это позволяет строить трехмерные модели нефтегазоносных объектов в соответствии с имеющимися двумерными. Также в статье приводятся некоторые результаты численных экспериментов, демонстрирующие качественное отличие моделей, полученных новым методом, от моделей, построенных традиционным крайгингом.

Литолого-фациальная модель геологического объекта, например нефтеносного пласта, описывает пространственное расположение различных геологических пород внутри этого объекта. От степени адекватности таких моделей на практике в значительной мере зависит точность оценки запасов месторождений нефти и газа, а также - эффективность эксплуатации таких месторождений. Обычно трехмерная литолого-фациальная модель состоит из двух составляющих:

- Геометрический каркас;
- Трехмерный массив литологических

индексов $V = \{b_{i,j,k}\}$, $i=1...I$, $j=1...J$, $k=1...K$

Геометрический каркас представляет собой область в трехмерном пространстве, соответствующую исследуемому участку геологического объекта и разделённую на слои непересекающихся ячеек. Предполагается, что в пределах одной ячейки моделируемый объект представлен только одной геологической породой. Все породы, встречающиеся в данном объекте, как правило, проиндексированы. Обозначим через $L = \{l_i\}$ конечное множество индексов пород. Множество L является множеством возможных значений для элементов массива V . При этом, между элементами трехмерного массива V и ячейками геометрического каркаса установлено взаимнооднозначное соответствие. В

процессе моделирования в качестве значения для $b_{i,j,k}$ выбирается индекс той породы, присутствие которой наиболее вероятно в соответствующей ячейке.

Введём в рассмотрение множество X - множество всех возможных вариантов заполнения массива $I \times J \times K$ значениями из L . Предположим, что имеется трехмерная литолого-фациальная модель, у которой в качестве массива V выбран некоторый вариант $t \in X$. Кроме того, предположим, что имеется некоторая функция $H(x): X \rightarrow R$, описывающая некоторые дополнительные сведения об объекте, не учтённые в имеющейся модели. Функция $H(x)$ задается таким образом, чтобы её значения были тем меньше, чем более соответствует x имеющимся дополнительным сведениям. Обозначим через $M \subseteq X$ множество всех глобальных минимумов $H(x)$. Задача корректировки имеющейся модели заключается в нахождении таких вариантов $x \in M$, которые бы как можно меньше отличались от первоначального состояния модели t . Как правило, количество ячеек модели так велико, что перебрать все возможные варианты $x \in X$ с целью нахождения наилучшего, не представляется возможным. Изложенная ниже авторская модификация метода имитации отжига позволяет на практике находить решение поставленной задачи за приемлемое время, не прибегая к полному перебору возможных вариантов.

Традиционный метод имитации отжига может быть использован для решения задачи поиска глобальных минимумов функции $H(x)$ на множестве X . Для этого итерационным образом строится реализация специального вида марковской цепи с элементами из X . Переходные вероятности цепи выбираются таким образом, чтобы, при стремлении числа итераций к бесконечности, вероятность реализации элемента с неминимальным значением $H(x)$ стремилась к нулю. Подробное изложение метода можно найти в [1] или [2]. Предлагаемая в настоящей статье модификация заключается в изменении переходных вероятностей таким образом, чтобы обеспечить стремление модели мало отличаться от начального состояния в смысле расстояния Хемминга.

Введём некоторую нумерацию элементов массива t и обозначим их общее число через $\sigma = I \times J \times K$. Под записью x_s будем понимать значение s -того

элемента в массиве $x \in X$. Рассмотрим также два неотрицательных числа $0 < q < p < 1$, таких что $q + p = 1$.

Определим на X следующую функцию:

$$V(x) = \prod_{s=1}^{\sigma} p_s(x), \quad (1)$$

где

$$p_s(x) = \begin{cases} p, & t_s = x_s, \\ q, & t_s \neq x_s. \end{cases}$$

Функция $V(x)$ оценивает отличие состояния x от состояния t : чем больше ячеек с совпадающими значениями в состояниях t и x , тем больше значение $V(x)$. Используя функции $V(x)$ и $H(x)$, построим параметрическое семейство распределений вероятности на X следующего вида:

$$\Pi^{\beta}(x) = \frac{V(x)e^{-\beta H(x)}}{Z} \quad (2)$$

где $Z = \sum_{z \in X} V(z)e^{-\beta H(z)}$ - нормирующая константа. Данные распределения

также можно представить в гиббсовской форме:

$$\Pi^{\beta}(x) = \frac{e^{-\beta H(x) + \ln(V(x))}}{Z} \quad (3)$$

Несложными преобразованиями можно показать, что последняя запись равносильна следующей:

$$\Pi^{\beta}(x) = \frac{e^{-\beta H(x) - \alpha h(x,t)}}{\tilde{Z}} \quad (4)$$

где $h(x,t)$ - расстояние Хемминга между состояниями x и t , $\alpha = \ln\left(\frac{p}{q}\right)$,

$$Z = \sum_{z \in X} e^{-\beta H(z) + \ln(V(z))}$$

Теорема 1 При стремлении параметра β к бесконечности распределение $\Pi^{\beta}(x)$ поточечно сходится к распределению:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Pi^{\beta}(x) = \begin{cases} \frac{V(x)}{\sum_{z \in M} V(z)}, & x \in M, \\ 0, & x \notin M \end{cases} \quad (5)$$

При этом, для $x \in M$ $\Pi^\beta(x)$, как функция β , монотонно возрастает, а для остальных x с некоторого момента становится убывающей.

Доказательство: Обозначим через m минимальное значение целевой функции $H(x)$ и перепишем формулу (2) в виде:

$$\Pi^\beta(x) = \frac{V(x)e^{-\beta(H(x)-m)}}{\sum_{z \in M} V(z)e^{-\beta(H(z)-m)} + \sum_{z \notin M} V(z)e^{-\beta(H(z)-m)}}$$

В случае, если x или z является точкой минимума, экспонента обращается в единицу независимо от значений β . В противном случае при $\beta \rightarrow \infty$ значение экспоненты стремится к нулю. Отсюда следует предельная формула в формулировке теоремы. Для случая $x \in M$ монотонность $\Pi^\beta(x)$ по параметру β очевидна. Рассмотрим случай $x \notin M$. При фиксированном x определим функцию $a(y) = H(y) - H(x)$. Тогда формулу (2) можно преобразовать к виду:

$$\Pi^\beta(x) = \frac{V(x)}{\sum_{y \in X: a(y)=0} V(y) + \sum_{y \in X: a(y)>0} V(y)e^{-\beta a(y)} + \sum_{y \in X: a(y)<0} V(y)e^{-\beta a(y)}}$$

Производная знаменателя по β равна

$$\sum_{y \in X: a(y)>0} -a(y)V(y)e^{-\beta a(y)} + \sum_{y \in X: a(y)<0} -a(y)V(y)e^{-\beta a(y)}$$

При $\beta \rightarrow \infty$ первое слагаемое с очевидностью стремится к бесконечности, а второе к нулю. Таким образом, начиная с некоторого момента, дробь, как функция параметра β , будет убывать. Теорема доказана.

Замечание. Предельное распределение в формулировке теоремы может быть записано в терминах расстояния Хемминга:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Pi^\beta(x) = \begin{cases} \frac{V(x)}{\sum_{z \in M} V(z)}, & x \in M, \\ 0, & x \notin M \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha h(x,t)}}{\sum_{z \in M} e^{-\alpha h(z,t)}}, & x \in M, \\ 0, & x \notin M \end{cases} \quad (6)$$

Особенность распределения (6) в том, что ненулевую вероятность имеют только варианты, минимизирующие целевую функцию $H(x)$. При этом, в случае $p > 0.5$ вероятность варианта $x \in M$ тем больше, чем меньше расстояние $h(x,t)$. Можно также легко проверить, что при $p = 0.5$ распределение станет равномерным на M , как и в случае классического метода имитации отжига (см.

[1], предложение 5.2), а в случае $p=1, q=0$ распределение $\Pi^\beta(x)$ будет вырожденным в t при любом β . Особого интереса оба эти случая не представляют. Практическая ценность распределения (6) в том, что оно позволяет реализовать ряд хороших с точки зрения имеющихся критериев состояний модели и выбрать из них наилучшее, руководствуясь, например, мнениями экспертов. Требуемую степень близости к исходному состоянию t можно регулировать выбором параметра p .

Для того, чтобы на практике получить выборку состояний модели, распределенную согласно распределению (6) следует, как и в классическом методе имитации отжига, построить специального вида неоднородную марковскую цепь. Для этого необходимо выбрать *схему охлаждения* - последовательность $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$. Именно схема охлаждения определяет переходные вероятности (марковские ядра) марковской цепи: на n -ом шаге марковское ядро $P_n(x, y)$ строится таким образом, чтобы распределение $\Pi^{\beta_n}(x)$ было инвариантно относительно $P_n(x, y)$ (точная формула для $P_n(x, y)$ будет приведена ниже). Для того, чтобы обеспечить сходимость цепи к распределению (6), необходимо наложить некоторые ограничения на переходные вероятности, которые можно сформулировать, как ограничения на схему охлаждения. Введем некоторые обозначения и определения, необходимые для получения этих ограничений и доказательства сходимости.

Через S будем обозначать множество элементов массива t , а через s - отдельные элементы. Для элемента $s \in S$ через δ_s будем обозначать осцилляцию функции $H(x)$ в нём:

$$\delta_s = \sup\{|H(x) - H(y)| : x_s = y_s \text{ при } s \notin S\},$$

а через Δ - максимальную осцилляцию по всем элементам модели:

$$\Delta = \max_{s \in S} \delta_s$$

Для распределений вероятности, определенных на X , ниже будем пользоваться нормой:

$$\mu = \sum_{x \in X} |\mu(x)|$$

Определение. Коэффициентом сжатия марковского ядра P называется величина

$$c(P) = \frac{1}{2} \max_{x,y} |P(x, \cdot) - P(y, \cdot)|$$

Из определения очевидно, что коэффициент сжатия будет равен нулю только в случае, если $P(x, \cdot)$ одинаково для всех x . Ниже нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. (см. [1] лемма 4.3) Для любого марковского ядра $Q(x, y)$ на конечном пространстве X

$$c(Q) \leq 1 - |X|^{-1} \min\{Q(x, y) : x, y \in X\} \quad (7)$$

Определение. Локальными характеристиками случайного поля $\Pi^{\beta_n}(x)$ называются марковские ядра (переходные вероятности), определяемые для $A \subseteq S$ формулой:

$$\Pi_A^{\beta_n}(x, y) = \begin{cases} \frac{V(y)e^{-\beta_n H(y)}}{Z_A}, & y: y_{S \setminus A} = x_{S \setminus A}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где $Z_A = \sum_{z: z_{S \setminus A} = x_{S \setminus A}} V(z)e^{-\beta_n H(z)}$.

Для одноточечных множеств $A = \{s\}$ локальные характеристики запишутся в виде:

$$\Pi_{\{s\}}^{\beta_n}(x, y) = \begin{cases} \frac{p_s(y)e^{-\beta_n H(y)}}{Z_s}, & y: y_{S \setminus \{s\}} = x_{S \setminus \{s\}}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где $Z_s = \sum_{z: z_{S \setminus \{s\}} = x_{S \setminus \{s\}}} V(z)e^{-\beta_n H(z)}$, так как все множители, входящие в функцию $V(y)$, сократятся, кроме $p_s(y)$. Заметим, что полученные локальные характеристики отличаются от локальных характеристик традиционного метода имитации отжига присутствием множителя $p_s(y)$ в числителе и множителей $p_s(z)$ в знаменателе. Несложно видеть, что применение таких локальных характеристик вместо "традиционных" для элемента массива с номером s равносильно умножению на p вероятности её перехода в t_s и умножению на q вероятности перехода в любое иное состояние.

Введем в рассмотрение марковские ядра вида:

$$P_n(x, y) = \prod_{\{1\}}^{\beta_n} \dots \prod_{\{\sigma\}}^{\beta_n}(x, y) \quad (8)$$

Известно, что гиббсовское поле инвариантно относительно своих локальных характеристик (см., например, [1] п.5.1), а значит $\prod^{\beta_n}(x)$ инвариантно относительно P_n .

Оценим коэффициент сжатия ядра P_n . Для этого зафиксируем некоторое $x \in X$ и обозначим через m_s - минимальное значение целевой функции $H(x)$, которое возможно получить при изменении значения только у одного фиксированного элемента $s \in S$:

$$m_s = \min_{y_{S \setminus \{s\}} = x_{S \setminus \{s\}}} H(y)$$

Тогда для $y : y_{S \setminus \{s\}} = x_{S \setminus \{s\}}$ верно:

$$\prod_{\{s\}}^{\beta_n}(x, y) = \frac{P_s(y) e^{-\beta_n(H(y) - m_s)}}{\sum_{z: z_{S \setminus \{s\}} = x_{S \setminus \{s\}}} P_s(z) e^{-\beta_n(H(z) - m_s)}} \geq |X_s|^{-1} e^{-\beta_n \delta_s} \frac{q}{p},$$

где $|X_s|$ - число возможных значений s -того элемента, а значит

$$\min_{x, y} P_n(x, y) \geq \prod_{s=1}^{\sigma} |X_s|^{-1} e^{-\beta_n \delta_s} \frac{q}{p} \geq |X_s|^{-1} e^{-\beta_n \Delta \sigma} \left(\frac{q}{p} \right)^{\sigma} \quad (9)$$

Следовательно, с учетом (7), можно получить оценку

$$c(P_n) \leq 1 - e^{-\beta_n \Delta \sigma} \left(\frac{q}{p} \right)^{\sigma} \quad (10)$$

Получим теперь условия, достаточные для того, чтобы Марковский процесс сходил к распределению (6). Для этого достаточно чтобы были выполнены условия следующей теоремы:

Теорема 2. (см. [1] теорема 4.3) *Рассмотрим марковские ядра $P_n, n \geq 1$, и предположим, что для каждого P_n существует инвариантное распределение μ_n .*

Предположим также, что выполнены следующие условия:

$$\sum_n \|\mu_n - \mu_{n-1}\| < \infty \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(P_i \dots P_n) = 0, \forall i \geq 1 \quad (12)$$

Тогда существует предел $\mu_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ и равномерно по всем начальным распределениям ν имеет место сходимость

$$\nu P_1 \dots P_n \rightarrow \mu_\infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Для доказательства справедливости условия (11) для распределений $\Pi^{\beta_n}(x)$ можно воспользоваться следующей леммой:

Лемма 2. (см. [1] лемма 4.6) Для вероятностных распределений $\mu_n, n \geq 1$, условие (11) выполнено, если каждая из числовых последовательностей $\{\mu_n(x)\}_{n \geq 1}$ начиная с некоторого момента является убывающей или возрастающей.

Условия леммы выполнены, так как монотонность $\Pi^{\beta_n}(x)$ начиная с некоторого номера N по параметру β была установлена выше в теореме 1. Таким образом, осталось показать, при каких условиях выполнено соотношение (12). Рассмотрим ещё две леммы:

Лемма 3. (см. [1] лемма 4.7) Соотношение (12) выполнено, если

$$\prod_{k \geq i} c(P_k) = 0, \forall i \geq 1 \quad (13)$$

или

$$c(P_n) > 0, \text{ для любого } n \text{ и } \prod_{k \geq 1} c(P_k) = 0 \quad (14)$$

Лемма 4. (см. [1] лемма 5.2) Предположим, что для вещественных последовательностей $\{a_n\}_{n \geq 1}$ и $\{b_n\}_{n \geq 1}$ выполнено $0 \leq a_n \leq b_n \leq 1, \forall n \geq 1$. Тогда $\sum_{n \geq 1} a_n = \infty$ влечет $\prod_{n \geq 1} (1 - b_n) = 0$.

Из этих двух лемм следует, что (12) будет выполнено, если найдется расходящийся ряд $\sum_{n \geq 1} a_n = \infty$, элементы которого удовлетворяют условию $0 \leq a_n \leq c(P_n(x, y)) \leq 1, \forall n \geq 1$. Выбрав в качестве такого ряда гармонический, получим достаточное условие

$$e^{-\beta_n \Delta \sigma} \left(\frac{q}{p} \right)^\sigma \geq \frac{1}{n}$$

После простых преобразований полученное выражение даст ограничение на схему охлаждения, при которой гарантирована сходимость процесса:

$$\beta_n \leq \frac{1}{\sigma\Delta} \ln \left(n \left(\frac{q}{p} \right)^\sigma \right) = \frac{1}{\sigma\Delta} \ln(n) + \frac{1}{\Delta} \ln \left(\frac{q}{p} \right) \quad (15)$$

В частном случае формулы (15), при $p = 0.5$, т.е. когда изменение значения каждого элемента $s \in S$ не зависит от его начального состояния, второе слагаемое обращается в 0 и оценка совпадает с оценкой для традиционного метода имитации отжига. В общем же случае ограничение на β_n меньше стандартного на константу, зависящую от p .

Заметим, что модифицированный метод имитации отжига алгоритмически мало отличается от классического. Как и в случае классического метода выбирается последовательность $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$, для каждого значения β_n выполняется "скан" - последовательный обход всех ячеек модели, при котором для каждой ячейки случайным образом принимается решение, изменить ли её значение или оставить прежним. Вероятности принять то или иное решение для ячейки с номером s в течении n -того скана определяются распределением $\Pi_{\{s\}}^{\beta_n}(x)$, которые и содержат отличие между традиционным и модифицированным методами.

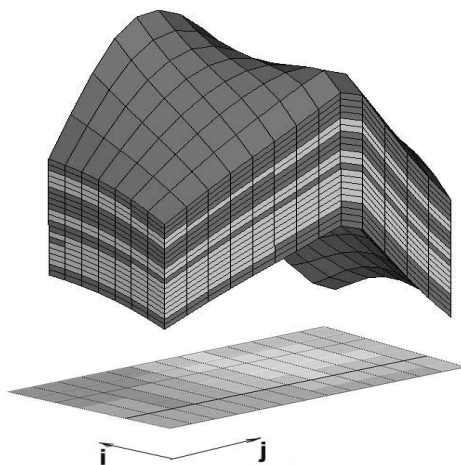


Рисунок 1. Трехмерная ЛФ модель и двумерная модель участка некоторого пласта

Численные эксперименты

Ниже приведены результаты численных экспериментов по построению литолого-фациальных моделей пласта Т1 Врезовского месторождения. Предполагалось, что в пределах пласта различаются два типа геологических пород: "коллектор"(порода, способная к фильтрации жидкости) и "неколлектор" (порода, не способная к фильтрации жидкости). Для обозначения этих пород в массиве использовались индексы "1" и "-1" соответственно. В ходе экспериментов пласт был промоделирован следующими методами:

1. Послойная интерполяция одним из традиционных геостатистических методов - "крайгинг" (подробное изложение метода можно найти в [3],[4] или [5]).
2. Традиционный метод имитации отжига (алгоритм Метрополиса). В качестве начального состояния использовалась модель, построенная "крайгингом". В целевую функцию закладывалась информация о предпочтительности крупных фаций над мелкими, а также требование соответствия априори заданной двумерной модели.
3. Корректировка модели, полученной "крайгингом", с помощью модифицированного метода имитации отжига.

Схема охлаждения в пунктах 2) и 3) выбиралась из соображений обеспечения сходимости алгоритмов, вид целевой функции задавался формулой:

$$H(x) = -\sum_{(t,s)} \alpha(t,s)x_t x_s + \gamma \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J d_{ij}^2 \quad (16)$$

Первое слагаемое данной функции позаимствовано из модели Изинга для ферромагнетиков и означает предпочтительность крупных связанных областей одинаковых значений перед мелкими и разрозненными. Суммирование в данном случае осуществляется по всем возможным парам соседних ячеек в модели, возможные значения ячеек x_t и x_s - "1" и "-1", $\alpha(t,s)$ - коэффициенты, определяющие анизотропию модели, задаваемые различными для различных направлений смежности ячеек. В рамках экспериментов $\alpha(t,s)$ выбирались так, чтобы обеспечить ориентацию фаций вдоль слоёв модели. Второе слагаемое обеспечивает соответствие будущей модели априорно заданной двумерной

модели (геологической карте). Для каждого вертикального столбца трехмерной модели двумерная модель определяет объемную долю коллекторских пород в нем. Через d_{ij} в формуле (16) обозначается невязка между долей коллектора в (i,j) -том столбце модели x и соответствующим значением с двумерной модели (см. рис. 1). Положительный коэффициент γ в данной формуле введён для возможности регулировки соотношения важности слагаемых. Необходимо заметить, что выбор такого коэффициента значительно влияет на результат: слишком большой весовой коэффициент при слагаемом может привести к игнорированию остальных слагаемых. Экспериментально было установлено, что, если сумма коэффициентов $\alpha(t,s)$ по всем 26 возможным направлениям вокруг ячейки равна 1, то к адекватным моделям приводит выбор γ в пределах $[0.1,0.2]$.

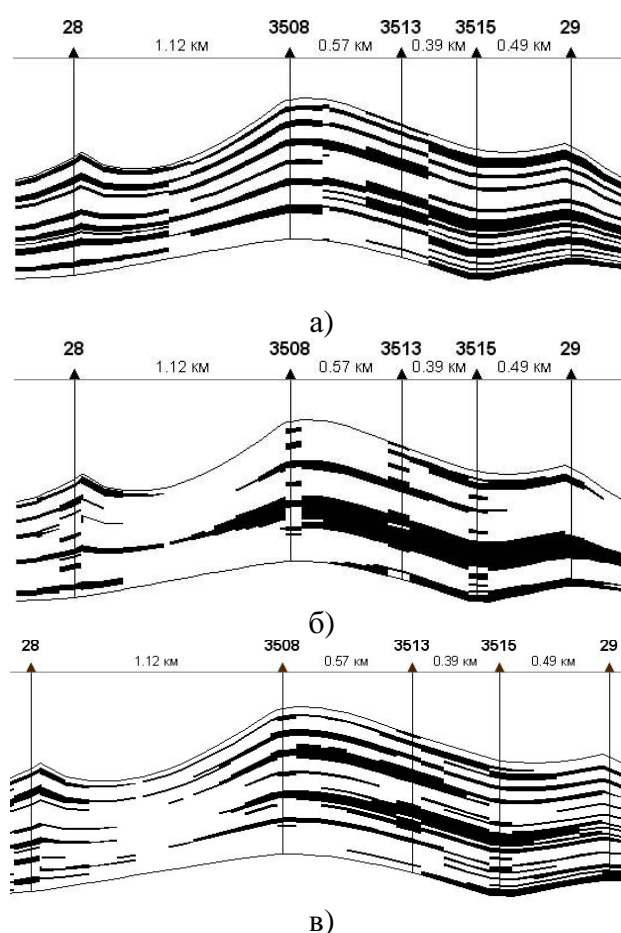


Рисунок 2. Сечения моделей:
а) начальная модель, б) алгоритм Метрополиса, в) алгоритм корректировки

Модель пласта содержала 67320 ячеек, составлявших 60 слоев. 480 ячеек соответствовали 8-ми скважинам и не модифицировались в процессе отжига. Количество выполненных итераций: 1000, время работы алгоритма корректировки: 156 секунд. Расчеты проводились на процессоре Intel Pentium IV 2400 MHz в модуле Gektra коммерческого программного комплекса Vaspro Optima. Результаты представлены на рис. 2, 3.

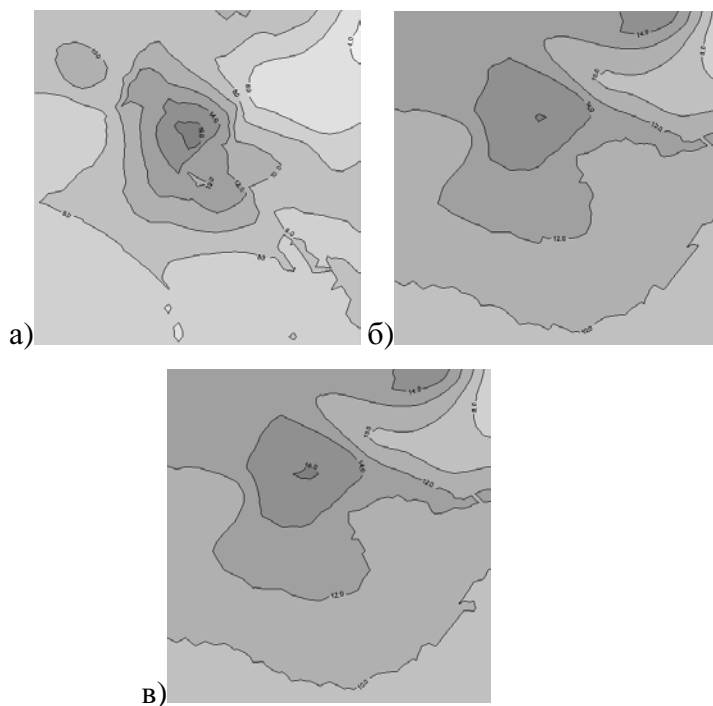


Рисунок 3. Карты эффективных толщин трехмерных моделей:
а) "крайгинг", б) алгоритм Метрополиса, в) алгоритм корректировки
(относительное отклонение от априорной 2D модели менее 0.005)

Качественные свойства моделей, полученных в результате экспериментов, следующие. Так как модель, построенная "крайгингом" была построена на основании только скважинной информации, она адекватна в окрестностях скважин, но не удовлетворяет априорной двумерной модели (см. рис. 2 а) и рис. 3 а)) вдали от них. Модель, построенная методом имитации отжига, показывает довольно близкое соответствие априорной карте (рис. 3 б)), но плохо соответствует скважинным данным, так как они не присутствовали в целевой функции метода (16) (рис.2. б)). В то же время, модель, полученная корректировкой первой модели, удовлетворяет как априорной карте, так и

скважинным данным (см. рис.2. в) и рис.3. б)). Таким образом, с качественной точки зрения, модель получаемая методом корректировки является наиболее предпочтительной для практического использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винклер Г. Анализ изображений, случайные поля и динамические методы Монте-Карло. // Новосибирск, Издательство СО РАН, филиал "Гео", 2002, 343 с.
2. S. Geman, D. Geman Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. IEEE Trans. PAMI, 6, 721-741.
3. P. Goovaerts. Geostatistics for Natural Resources Evaluation. // Oxford University Press, 1997
4. Y. Lin, Y. Tan, S. Rouhani Identifying spatial characteristics of transmissivity using simulated annealing and kriging methods. //Environmental Geology, 41: 200-208, 2001
5. Дмитриевский М.В. Оптимизация некоторых алгоритмов восстановления полей геологических и геофизических параметров. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Тюмень, 2003.
6. Бекман А.Д. Построение трехмерных литологических моделей с учетом разнородной априорной информации с помощью метода имитации отжига. // Математическое и информационное моделирование: Сборник статей. Тюмень. Издательство Тюменского государственного университета, 2005. с. 26-39